Lineare Algebra KW 46

Nina Gassner

Let's talk about the quiz rq! :D

Problem 1. [0.5 Points] Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Compute a CR decomposition $A = CR$ using Gauss–Jordan elimination. Show your row operations.

von R zu R', C ?

Let's talk about the quiz rq! :D

Problem 2. [0.5 Points] Let V be the vector space of real polynomials of degree at most 2, and consider

$$U = \{\mathbf{p} \in V : \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(1)\}.$$

Show that U is a subspace of V using the subspace criterion.

3 Eigenschaften!

Let's talk about the quiz rq! :D

Problem 2. [0.5 Points] Let V be the vector space of real polynomials of degree at most 2, and consider

$$U = \{\mathbf{p} \in V : \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(1)\}.$$

Show that U is a subspace of V using the subspace criterion.

3 Eigenschaften!
(aufzählen ist auch schon gut!)

Orthogonalität

quick recap !! :D

Orthogonalität

Let V be a subspace of $\mathbb{R}^n$.
Then $V = (V^{\perp})^{\perp}$.

Orthogonalität

Let V be a subspace of $\mathbb{R}^n$.
Then $V = (V^{\perp})^{\perp}$.

letzte Woche gesehen:

$$N(A)^{\perp} = R(A) = C(A^{\top})$$

daraus folgt jetzt:

$$N(A) = R(A)^{\perp} = C(A^{\top})^{\perp}$$

Orthogonalität

Let V be a subspace of $\mathbb{R}^n$.
Then $V = (V^{\perp})^{\perp}$.

letzte Woche gesehen:

$$N(A)^{\perp} = R(A) = C(A^{\top})$$

daraus folgt jetzt:

$$N(A) = R(A)^{\perp} = C(A^{\top})^{\perp}$$

macht intuitiv ganz viel Sinn :D

Orthogonalität

perfekte Aufgabe dazu aus HS25...

a) **[3 Points]** Let $V \subseteq \mathbb{R}^n$ be an $(n-2)$-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$. Show that there exist two linearly independent vectors $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ such that

$$V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathbf{u}_1^\top \mathbf{x} = 0 \;\text{ and }\; \mathbf{u}_2^\top \mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Orthogonalität

ähnlich dazu ...

Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Unterraum mit $\dim(V) = 1$.
Zeige, dass eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ existiert, sodass $\operatorname{rank}(B) = 2$ und $\mathcal{N}(B) = V$.

Orthogonalität

$$\mathbb{R}^n = V + V^{\perp} = \{v + w \mid v \in V, w \in V^{\perp}\}$$

Orthogonalität

$$\mathbb{R}^n = V + V^{\perp} = \{v + w \mid v \in V, w \in V^{\perp}\}$$

für jeden Unterraum V gilt:

Man kann jeden Vektor v eindeutig zerlegen in:

Komponente aus V + Komponente aus $V^{\perp}$

Orthogonalität

$$\mathbb{R}^n = V + V^{\perp} = \{v + w \mid v \in V, w \in V^{\perp}\}$$

für jeden Unterraum V gilt:

Man kann jeden Vektor v eindeutig zerlegen in:

Komponent aus V + Komponent aus $V^{\perp}$

Theorem 5.1.7

Let V, W be orthogonal subspaces of $\mathbb{R}^n$. The statements are equivalent.

(i) $W = V^{\perp}$.

(ii) $\dim(V) + \dim(W) = n$.

(iii) Every $u \in \mathbb{R}^n$ can be written as $u = v + w$ with unique $v \in V$, $w \in W$.



Orthogonalität

und mit dieser Theorie kommt der Übergang zum nächsten Thema...
:D

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) = \textit{Projektion von } b \textit{ auf } V$

$$\overset{\text{def}}{\iff} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

Projektionen!

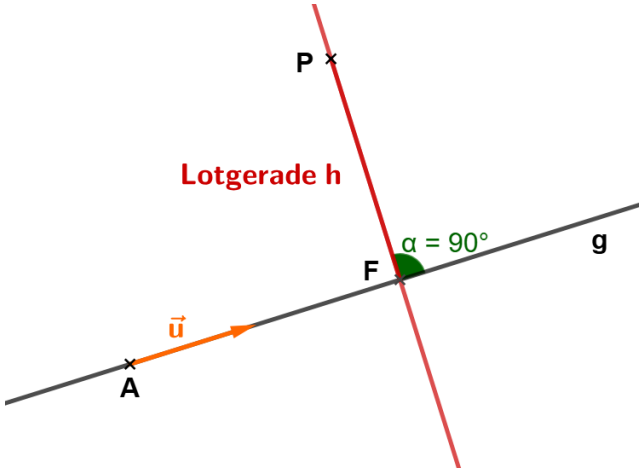
$v = \text{proj}_V(b) = \textit{Projektion von } b \textit{ auf } V$

$$\overset{\text{def}}{\iff} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

= “der Punkt aus V mit dem minimalen Abstand zu b”

Projektionen!

zwei-dimensional kennt ihr das Problem schon! :)

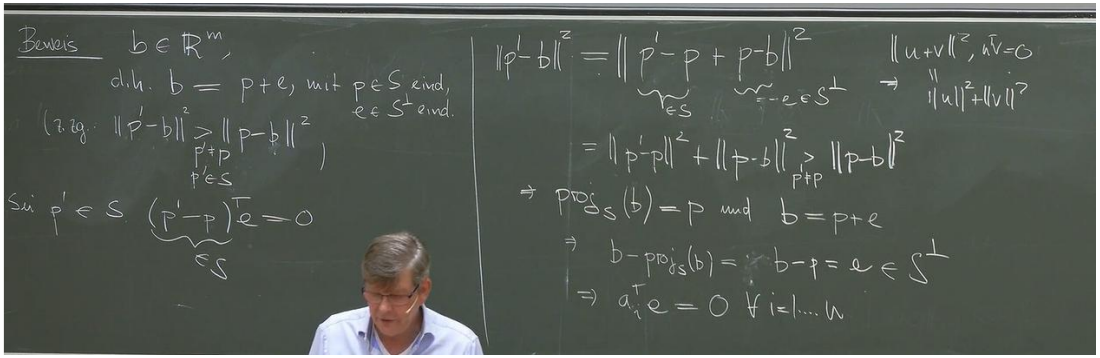


Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) =$ *Projektion von b auf V*

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

$$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp}$$



Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) =$ *Projektion von b auf V*

$$\overset{\text{def}}{\iff} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

$$\iff b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \iff b - v \in V^{\perp}, v \in V$$

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) =$ *Projektion von b auf V*

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

$$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \Leftrightarrow \ b - v \in V^{\perp}, v \in V$$

Ist die Projektion eindeutig? (wieso / wieso nicht?)

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) = \textit{Projektion von } b \textit{ auf } V$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$

$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \Leftrightarrow \ b - v \in V^{\perp}, v \in V$

$\Leftrightarrow \ A^{\top}v = A^{\top}b,\ v \in V$ (mit A definiert als: Spalten von A = Basisvektoren von V)

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) = \textit{Projektion von } b \textit{ auf } V$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$

$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \Leftrightarrow \ b - v \in V^{\perp}, v \in V$

$\Leftrightarrow \ A^{\top}v = A^{\top}b,\ v \in V$ (mit A definiert als: Spalten von A = Basisvektoren von V)

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) = \textit{Projektion von } b \textit{ auf } V$

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$

$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^\perp \Leftrightarrow\ b - v \in V^\perp, v \in V$

$\Leftrightarrow\ A^\top v = A^\top b,\ v \in V$ (mit A definiert als: Spalten von A = Basisvektoren von V)

$\Leftrightarrow\ v = A(A^\top A)^{-1} A^\top b$

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) =$ *Projektion von b auf V*

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$

$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \Leftrightarrow \ b - v \in V^{\perp}, v \in V$

$\Leftrightarrow \ A^{\top}v = A^{\top}b,\ v \in V$ (mit A definiert als: Spalten von A = Basisvektoren von V)

$\Leftrightarrow \ v = A(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}b$

Projektionsmatrix

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) =$ *Projektion von b auf V*

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

$$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \Leftrightarrow \ b - v \in V^{\perp}, v \in V$$

$$\Leftrightarrow \ A^{\top} v = A^{\top} b,\ v \in V$$ (mit A definiert als: Spalten von A = Basisvektoren von V)

$$\Leftrightarrow \ v = A(A^{\top} A)^{-1} A^{\top} b$$

Projektionsmatrix

Wieso ist die Projektionsmatrix wohldefiniert?

Projektionen!

$v = \text{proj}_V(b) =$ *Projektion von b auf V*

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} v = \underset{p \in V}{\text{argmin}} \|b - p\|$$

$$\Leftrightarrow b = v + w, \quad v \in V,\ w \in V^{\perp} \Leftrightarrow \ b - v \in V^{\perp}, v \in V$$

$$\Leftrightarrow \ A^{\top} v = A^{\top} b,\ v \in V$$ (mit A definiert als: Spalten von A = Basisvektoren von V)

$$\Leftrightarrow \ v = A(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}b$$

Projektionsmatrix

Wieso ist die Projektionsmatrix wohldefiniert?
Ist die Projektionsmatrix eindeutig?

Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.

$$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top.$$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.

$$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top.$$

$$P^2 = P$$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.

$$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top.$$

$$P^2 = P$$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.

$$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top.$$

$$P^2 = P$$

$$P^\top = P$$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.

$$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top.$$

$$P^2 = P$$
$$P^\top = P$$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.
$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$.

$P^2 = P$
$P^\top = P$
$PA = A$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.

$$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top.$$

$$P^2 = P$$
$$P^\top = P$$
$$PA = A$$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.
$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$.

$P^2 = P$
$P^\top = P$
$PA = A$
P is always invertible.
P is never invertible.



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.
$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$.

$P^2 = P$
$P^\top = P$
$PA = A$
P is always invertible.
P is never invertible.



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.
$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$.

$P^2 = P$
$P^\top = P$
$PA = A$
P is always invertible.
P is never invertible.
$(I - P)$ is the projection matrix on $S^\perp$



Projektionen!

time to test your knowledge :D

Let $S \subseteq \mathbb{R}^m$ be a subspace, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ with its columns forming a basis of S.
$P = A(A^\top A)^{-1} A^\top$.

$P^2 = P$
$P^\top = P$
$PA = A$
P is always invertible.
P is never invertible.
$(I - P)$ is the projection matrix on $S^\perp$



Projektionen!

time for a teeny tiny kahoot !!!
(with HUUGE prizes haha)

least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$



least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\min_{v \in \mathrm{C(A)}} \|b - v\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\min_{v \in \mathrm{C(A)}} \|b - v\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

$v = Ax$

$\Longrightarrow \left(v = \mathrm{proj}_{C(A)}(b) \Leftrightarrow x \text{ is a least}-\text{squares solution}\right)$



least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad A^\top v = A^\top b,\ v \in C(A)$$

$$\min_{v \in \mathrm{C(A)}} \|b - v\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

$$v = Ax$$

$$\Longrightarrow \left(v = \mathrm{proj}_{C(A)}(b) \Leftrightarrow x \text{ is a least}-\text{squares solution}\right)$$

least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

$$\Leftrightarrow \; A^\top v = A^\top b,\; v \in C(A)$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\Leftrightarrow \; A^\top Ax = A^\top b,\; x \in \mathbb{R}^n$$

$$\min_{v \in \mathrm{C(A)}} \|b - v\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

$$v = Ax$$

$$\Longrightarrow \; \left(v = \mathrm{proj}_{C(A)}(b) \Leftrightarrow x \text{ is a least}-\text{squares solution}\right)$$

least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

$$\Leftrightarrow\ A^\top v = A^\top b,\ v \in C(A)$$
$$\Leftrightarrow\ v = A(A^\top A)^{-1} A^\top b$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\Leftrightarrow\ A^\top Ax = A^\top b,\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\min_{v \in \mathrm{C(A)}} \|b - v\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

$$v = Ax$$
$$\Longrightarrow \left(v = \mathrm{proj}_{C(A)}(b) \Leftrightarrow x \text{ is a least}-\text{squares solution}\right)$$

least squares!

Projektionen

$$v = \arg\min_{p \in C(A)} \|b - p\|^2$$

$$\Leftrightarrow\ A^\top v = A^\top b,\ v \in C(A)$$
$$\Leftrightarrow\ v = A(A^\top A)^{-1} A^\top b$$

Least squares

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\Leftrightarrow\ A^\top Ax = A^\top b,\ x \in \mathbb{R}^n$$
$$\Leftrightarrow\ x = (A^\top A)^{-1} A^\top b$$

$$\min_{v \in \mathrm{C(A)}} \|b - v\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

$$v = Ax$$
$$\Longrightarrow \left(v = \mathrm{proj}_{C(A)}(b) \Leftrightarrow x \text{ is a least-squares solution}\right)$$

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = 2.$$

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.
Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, ist die Least-Squares-Lösung eindeutig.

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.
Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, ist die Least-Squares-Lösung eindeutig.

least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.
Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, ist die Least-Squares-Lösung eindeutig.
Falls Ax=b lösbar ist, ist jede Lösung auch eine Least-Squares-Lösung.



least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.
Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, ist die Least-Squares-Lösung eindeutig.
Falls Ax=b lösbar ist, ist jede Lösung auch eine Least-Squares-Lösung.

least squares

Let's test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.
Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, ist die Least-Squares-Lösung eindeutig.
Falls Ax=b lösbar ist, ist jede Lösung auch eine Least-Squares-Lösung.
Für jede Least-Squares-Lösung x gilt: Ax ist die Projektion von b auf C(A).



least squares

Let’s test your knowledge!
wahr oder falsch?

Das Least-Squares-Problem hat immer mindestens eine Lösung.
Das Least-Squares-Problem hat immer genau eine Lösung.
Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, ist die Least-Squares-Lösung eindeutig.
Falls Ax=b lösbar ist, ist jede Lösung auch eine Least-Squares-Lösung.
Für jede Least-Squares-Lösung x gilt: Ax ist die Projektion von b auf C(A).



least squares

super relevant !!!

HS25

a) [3 Points] Consider the matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ and the vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ defined as

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ and } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Find the unique vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ that minimizes $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$.

Remark: The correct answer satisfies $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \frac{7}{2}$. *You can use this to check your answer.*

$\mathbf{x} =$

least squares

super relevant !!!
HS24

a) Consider the matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

and the vector

$$\mathbf{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Write down the unique vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ that minimizes $\| A\mathbf{x} - \mathbf{b} \|$.

/1 ·6

Remark: *The correct answer satisfies* $\| A\mathbf{x} - \mathbf{b} \| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *You can use this to sanity-check your answer.*

in-class

1. Linear regression (in-class) (★☆☆)

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

t_i	1	2	3	4	5
b_i	2	3	5	6	8

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between t, b by a function f, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict f to be a line, i.e. f should have the form

$$f(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for α_1, α_0. As discussed in the lecture, this idea of fitting a line through a set of datapoints is called linear regression.

in-class

1. Linear regression (in-class) (★☆☆)

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

t_i	1	2	3	4	5
b_i	2	3	5	6	8

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between t, b by a function f, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict f to be a line, i.e. f should have the form

$$f(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for α_1, α_0. As discussed in the lecture, this idea of fitting a line through a set of datapoints is called linear regression.

a) For each datapoint (t_i, b_i) with $i \in [5]$, we get an equation for α_1, α_0 from $f(t_i) = b_i$. Write down the system of linear equations that we get by combining all five equations.

in-class

1. Linear regression (in-class) (★☆☆)

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

t_i	1	2	3	4	5
b_i	2	3	5	6	8

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between t, b by a function f, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict f to be a line, i.e. f should have the form

$$f(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for α_1, α_0. As discussed in the lecture, this idea of fitting a line through a set of datapoints is called linear regression.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) For each datapoint (t_i, b_i) with $i \in [5]$, we get an equation for α_1, α_0 from $f(t_i) = b_i$. Write down the system of linear equations that we get by combining all five equations.

in-class

1. Linear regression (in-class) (★☆☆)

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

t_i	1	2	3	4	5
b_i	2	3	5	6	8

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between t, b by a function f, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict f to be a line, i.e. f should have the form

$$f(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for α_1, α_0. As discussed in the lecture, this idea of fitting a line through a set of datapoints is called linear regression.

b) Do you expect this system to have any solutions? (Answer this intuitively without actually solving the system).

in-class

1. Linear regression (in-class) (★☆☆)

We want to determine the parameters of a certain model function from some measured values. Assume that we measured the following values

t_i	1	2	3	4	5
b_i	2	3	5	6	8

where $i \in [5]$. Moreover, assume that we want to model the relationship between t, b by a function f, i.e. $b = f(t)$. In this exercise, we restrict f to be a line, i.e. f should have the form

$$f(t) = \alpha_1 t + \alpha_0$$

for parameters $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$. Our goal is to find suitable values for α_1, α_0. As discussed in the lecture, this idea of fitting a line through a set of datapoints is called linear regression.

$$x = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad A^\top A x = A^\top b, \; x \in \mathbb{R}^n$$

c) Using the normal equations, find an approximate solution to the system you wrote down.

mehr Aufgaben! :D

aus HS22:

Denote a plane in 3D as a set of points $P(\alpha, \beta, \gamma) = \{ (x, y, z) \mid z = \alpha x + \beta y + \gamma \}$, where α, β, γ are parameters that uniquely determine such a plane. We wish to find a plane $P(\alpha, \beta, \gamma)$ that passes through the following four points:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (\,1, \quad 0, \quad 1\,), \\
\mathbf{p}_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (\,-1, \quad 2, \quad 1\,), \\
\mathbf{p}_3 &= (x_3, y_3, z_3) = (\,1, \quad 1, \quad 3\,), \\
\mathbf{p}_4 &= (x_4, y_4, z_4) = (\,-1, \quad 1, \quad -2\,).
\end{aligned}$$

a) Set up the overdetermined linear system $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ from the above four constrained points, where the variables are $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Write down the matrix $\mathbf{A}$ and the vector $\mathbf{b}$ explicitly and specify their dimensions.

/6

mehr Aufgaben! :D

aus HS22:

Denote a plane in 3D as a set of points $P(\alpha, \beta, \gamma) = \{\, (x, y, z) \mid z = \alpha x + \beta y + \gamma \}$, where α, β, γ are parameters that uniquely determine such a plane. We wish to find a plane $P(\alpha, \beta, \gamma)$ that passes through the following four points:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (\,1, \quad 0, \quad 1\,), \\
\mathbf{p}_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (\,-1, \quad 2, \quad 1\,), \\
\mathbf{p}_3 &= (x_3, y_3, z_3) = (\,1, \quad 1, \quad 3\,), \\
\mathbf{p}_4 &= (x_4, y_4, z_4) = (\,-1, \quad 1, \quad -2\,).
\end{aligned}
$$

a) Set up the overdetermined linear system $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ from the above four constrained points, where the variables are $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Write down the matrix $\mathbf{A}$ and the vector $\mathbf{b}$ explicitly and specify their dimensions.

/6

$$
\begin{aligned}
\alpha + \gamma &= 1 \\
-\alpha + 2\beta + \gamma &= 1 \\
\alpha + \beta + \gamma &= 3 \\
-\alpha + \beta + \gamma &= -2.
\end{aligned}
$$

mehr Aufgaben! :D

aus HS22:

Denote a plane in 3D as a set of points $P(\alpha, \beta, \gamma) = \{\, (x, y, z) \mid z = \alpha x + \beta y + \gamma \}$, where α, β, γ are parameters that uniquely determine such a plane. We wish to find a plane $P(\alpha, \beta, \gamma)$ that passes through the following four points:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (\,1, \quad 0, \quad 1\,), \\
\mathbf{p}_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (\,-1, \quad 2, \quad 1\,), \\
\mathbf{p}_3 &= (x_3, y_3, z_3) = (\,1, \quad 1, \quad 3\,), \\
\mathbf{p}_4 &= (x_4, y_4, z_4) = (\,-1, \quad 1, \quad -2\,).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \gamma &= 1 \\
-\alpha + 2\beta + \gamma &= 1 \\
\alpha + \beta + \gamma &= 3 \\
-\alpha + \beta + \gamma &= -2.
\end{aligned}$$

a) Set up the overdetermined linear system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ from the above four constrained points, where the variables are $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Write down the matrix $\mathbf{A}$ and the vector $\mathbf{b}$ explicitly and specify their dimensions.

/6

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{4\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}}_{x \in \mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b \in \mathbb{R}^4}$$

mehr Aufgaben! :D

... aus HS25

c) [3 Points] Let S, T be orthogonal subspaces of $\mathbb{R}^n$. Show that for any vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ we have

$$\text{proj}_{S+T}(\mathbf{v}) = \text{proj}_S(\mathbf{v}) + \text{proj}_T(\mathbf{v}).$$

Hint: You can use the standard identity $(S+T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$ *in your proof.*

mehr Aufgaben! :D

... dazu ähnlich:

Let $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ be subspaces, and let $u \in S$.
Show that for every $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{proj}_{S+T}(v + u) = \text{proj}_{S+T}(v) + u$$

mehr Aufgaben! :D

ein cooler alternativer Beweis zu
$C(A^T A) = C(A^T)$? :D

bis nächste Woche!



https://linalg.guru

Zusatzslides!

true or false? (aus FS23)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Falls gilt, dass $\forall v \in V, \ \langle v, F(v) \rangle = 0$, dann ist F notwendigerweise die Nullabbildung: $F(v) = \mathbf{0}$ für alle $v \in V$.

false!



Zusatzslides!

HS24

c) Let $n \in \mathbb{N}^+$ be arbitrary and consider two arbitrary subspaces $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ with $\dim(U) + \dim(V) \geq n + 1$. Prove that $|U \cap V| \geq 2$.

/3 ·3

Zusatzslides!

b) Write down the inverse A^{-1} of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

/1 ·7

Remark: Recall that the inverse can be found by solving the linear system $AX = I$ for $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Alternatively, you can also approach this as four linear systems $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$, $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$, and $A\mathbf{x}_4 = \mathbf{e}_4$, where $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4$ are the columns of X and $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ are the standard unit vectors (columns of I).

Zusatzslides!

b) Write down the inverse A^{-1} of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

/1 ·7

Remark: Recall that the inverse can be found by solving the linear system $AX = I$ for $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Alternatively, you can also approach this as four linear systems $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$, $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{e}_3$, and $A\mathbf{x}_4 = \mathbf{e}_4$, where $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4$ are the columns of X and $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4$ are the standard unit vectors (columns of I).

Zusatzslides!

MC2. [**2 Points**] Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ be a matrix satisfying

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{for any } x, y \in \mathbb{R}.$$

Which of the following statements must be **true**?

- ☐ A is symmetric.
- ☐ $A = 0$.
- ☐ $\operatorname{rank}(A) < 2$.



Zusatzslides!

MC2. [**2 Points**] Let $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ be a matrix satisfying

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{for any } x, y \in \mathbb{R}.$$

Which of the following statements must be **true**?

- ☐ A is symmetric.
- ☐ $A = 0$.
- ☐ $\operatorname{rank}(A) < 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zusatzslides!

true or false? (aus FS23)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Falls gilt, dass $\forall v \in V, \ \langle v, F(v) \rangle = 0$, dann ist F notwendigerweise die Nullabbildung: $F(v) = \mathbf{0}$ für alle $v \in V$.

