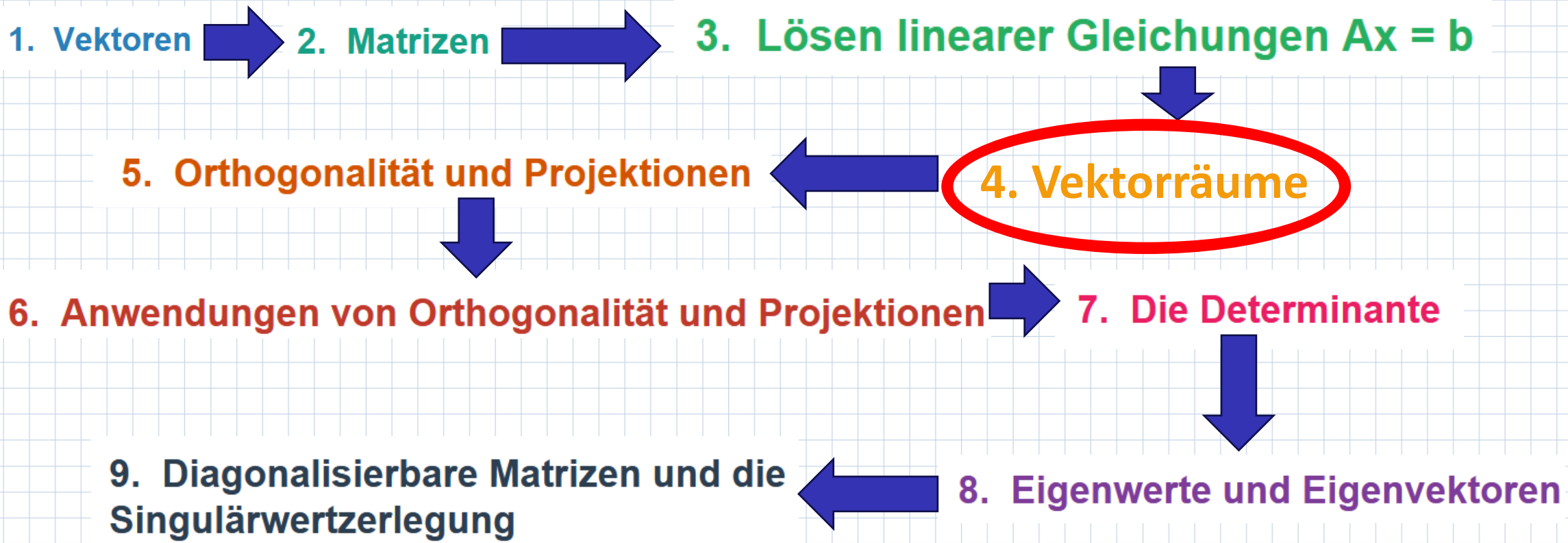
Linear Algebra

Week 6 — Gauss-Jordan Elimination

Joshua Gao
HS26

Roadmap

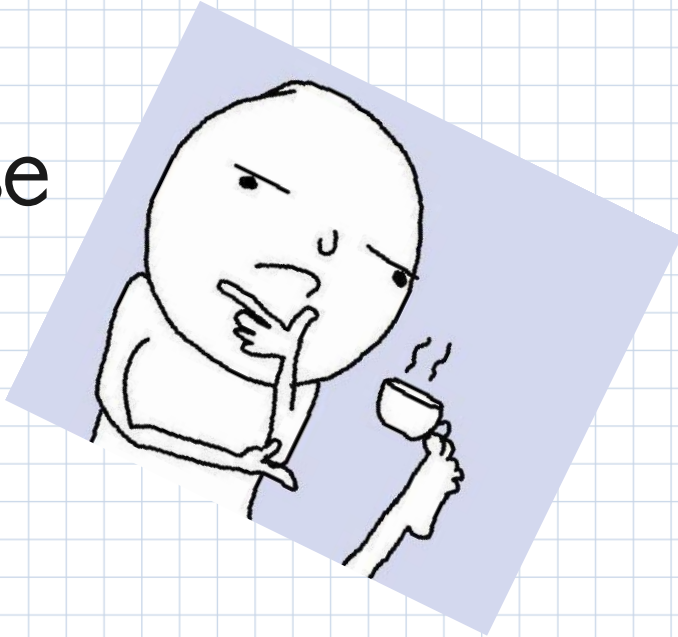

1. Vektoren
2. Matrizen
3. Lösen linearer Gleichungen Ax = b
4. Vektorräume
5. Orthogonalität und Projektionen
6. Anwendungen von Orthogonalität und Projektionen
7. Die Determinante
8. Eigenwerte und Eigenvektoren
9. Diagonalisierbare Matrizen und die Singulärwertzerlegung

Quiz

- “$\Longrightarrow$“ nicht vergessen!
- a) 👍 👍 👍
- b) leider viele falsch

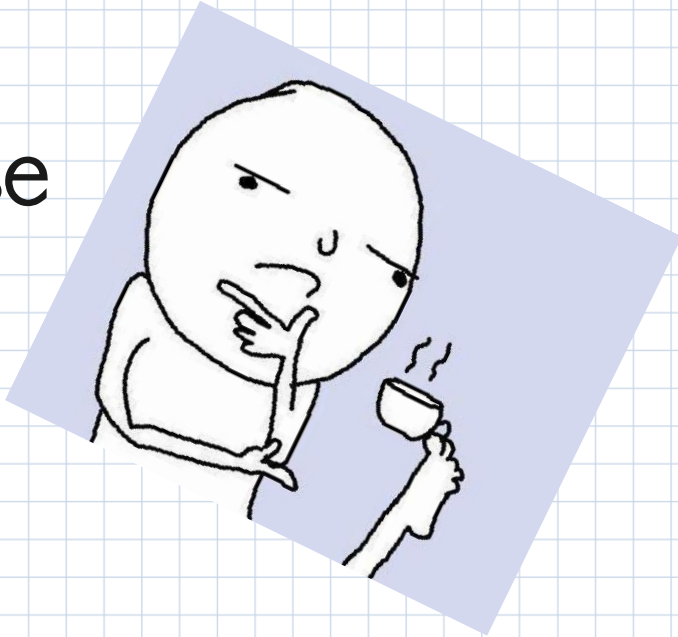
Vom letzten Mal

Wie zeigen wir, dass B die Inverse von A ist?



Vom letzten Mal

Wie zeigen wir, dass B die Inverse von A ist?



Definition 2.57 (Inverse Matrix)

Let A be an m × m matrix. A is invertible if and only if there exists an m × m matrix B such that BA = I (or AB = I, or AB = BA = I). In this case, there is exactly one such matrix B, called the inverse of A. We denote it by A^{-1}.

Das heisst:

Wir wollen zeigen dass BA = I oder AB = I gilt

Problem 2. [0.5 Points] Let $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ satisfy

$$A^2 = I - A.$$

Show that $A^{-1} = I + A$.

Key Takeaway

Zeigt die Gleichung $AA^{-1} = \mathrm{I}$
(oder $A^{-1}A = \mathrm{I}$)

Aufgabe der anderen Gruppe

Problem 2. [0.5 Points] Let $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ satisfy

$$A^2 = 0.$$

Show $(I - A)^{-1} = I + A$.

Feedback

- (schwere Aufgabe)
- 👍 👍 👍
- begründet mit Lemma/Theorem Skript
- mehr Schritte > weniger Schritte



Danke für euer Feedback!

Reduced Row Echelon Form

Definition 3.13 (Reduced row echelon form). *Let $R = [r_{ij}]_{i=1,j=1}^{m\ n}$ be an $m \times n$ matrix. R is in* reduced row echelon form (RREF) *if there is some natural number $r \leq m$ and column indices $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ (the indices of the "downward step" columns) such that the following two conditions hold.*

(i) For every $i \in [r]$, column j_i of R is the standard unit vector $\mathbf{e}_i$.

(ii) All entries r_{ij} "below the staircase" are 0. Formally, an entry r_{ij} is below the staircase *if*

(a) $i > r$ (the entry is below row r), or

(b) $i \leq r$ and $j < j_i$ (the entry is in the part of row i to the left of column j_i).

If we want to describe the shape of R precisely, we say that R is in $\mathrm{RREF}(j_1, j_2, \ldots, j_r)$.

Beispiel mit r = 3

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

RREF oder nicht?

✓ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

✓ $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

✗ $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

✗ $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

✗ $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

✓ $M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

✓ $M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

RREF oder nicht?

✓ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

✓ $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

✗ $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

✗ $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

✗ $M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

✓ $M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

✓ $M_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

✓ $M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Gauss-Jordan Elimination

Eine neue Matrix (von links multipliziert)

Zeilen skalieren

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bedeutung

Multipliziere die 3. Zeile mit 2

Gauss-Jordan Elimination

Eine neue Matrix (von links multipliziert)

Zeilen skalieren

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bedeutung

Multipliziere die 3. Zeile mit 2

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

Allgemein

Zeile 3 soll mit z multipliziert werden.

Gauss-Jordan Elimination

Eine neue Matrix (von links multipliziert)

Zeilen skalieren

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

Inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan Elimination

Neues Ziel

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan Elimination: Beispiel

Gegeben

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \in \mathbb{R}^{3x5}$$

Schritt 1: Spalte 1 — Zeile 1 · 1/2

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

D_1 A D_1A

Was passiert?

- Spalte 1: Pivot ist $(1,1) = 2 \neq 0$, kein Tausch nötig.
- Zeile 1 durch 2 teilen, damit der Pivot **1** wird: D_1 = Einheitsmatrix mit $1/2$ an Position (1, 1).

Schritt 2: Spalte 1 — Zeile 2 − 6 · Zeile 1

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 12 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}}_{D_1 A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}}_{E_{21} D_1 A}$$

Was passiert?

- Unter dem Pivot eliminieren: Eintrag (2,1) = 6 soll 0 werden.
- Zeile 2 − 6 · Zeile 1: E_{21} = Einheitsmatrix mit -6 an Position (2, 1).

Schritt 3: Spalte 1 — Zeile 3 − 4 · Zeile 1

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-4} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 4 & 8 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}}_{E_{21}D_1A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}}_{E_{31}E_{21}D_1A}$$

Was passiert?

- Eintrag $(3,1) = 4$ soll 0 werden: Zeile 3 − 4 · Zeile 1.
- Danach ist Spalte 1 fertig: Pivot **1**, sonst nur Nullen.

Spalte 2: kein Pivot — freie Spalte

Aktueller Stand

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 7 \\ 0 & \mathbf{0} & -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$E_{31}E_{21}D_1A$$

Was passiert?

- Spalte 2: Unterhalb von Zeile 1 stehen nur Nullen $(0, 0)$ — es gibt **keinen Pivot**.
- Spalte 2 ist eine **freie Spalte**. Wir gehen zu Spalte 3; der nächste Pivot kommt in Zeile 2.

Schritt 4: Spalte 3 — Zeile 2 ↔ Zeile 3

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}}_{P_{23}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}}_{E_{31}E_{21}D_1A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}}_{P_{23}E_{31}E_{21}D_1A}$$

Was passiert?

- Spalte 3: Eintrag $(2,3) = 0$ kann kein Pivot sein, aber $(3,3) = -2 \neq 0$.
- Also Zeile 2 und Zeile 3 tauschen: P_{23} = Einheitsmatrix mit vertauschten Zeilen 2 und 3.

Schritt 5: Spalte 3 — Zeile 2 · (−1/2)

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-2} & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}}_{P_{23}E_{31}E_{21}D_1A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}}_{D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1A}$$

Was passiert?

- Pivot ist jetzt $(2,3) = -2$.
- Zeile 2 durch −2 teilen, damit der Pivot **1** wird: $-1/2$ an Position (2, 2) in D_2.

Schritt 6: Spalte 3 — Zeile 1 − 1 · Zeile 2

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}}_{D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}}_{E_{12}D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1A}$$

Was passiert?

- Unter dem Pivot steht schon 0. Gauss-Jordan eliminiert aber auch **oberhalb** des Pivots:
- Eintrag $(1,3) = 1$ wird mit Zeile 1 − 1 · Zeile 2 zu 0.

Schritt 7: Spalte 4 — Zeile 2 − 1 · Zeile 3

Zeilenoperation als Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}}_{E_{12}D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}}_{E_{23}E_{12}D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1A}$$

Was passiert?

- Spalte 4: Pivot $(3,4) = 1$ — schon 1, also kein Teilen nötig. Eintrag (1,4) ist bereits 0.
- Eintrag $(2,4) = 1$ wird mit Zeile 2 − 1 · Zeile 3 zu 0. Danach gibt es keine Zeile mehr → fertig.

Ergebnis: reduzierte Zeilenstufenform R_0

Reduzierte Zeilenstufenform

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R_0} = E_{23}E_{12}D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1A$$

Was passiert?

- **Pivotspalten** 1, 3, 4 (fette Einsen), **freie Spalten** 2 und 5 — also Rang $\mathrm{r} = 3$.
- Alle Zeilenoperationen zusammen: $M = E_{23}E_{12}D_2P_{23}E_{31}E_{21}D_1$ ist invertierbar und $\boldsymbol{R_0} = MA$.

Spalten einer Matrix in RREF

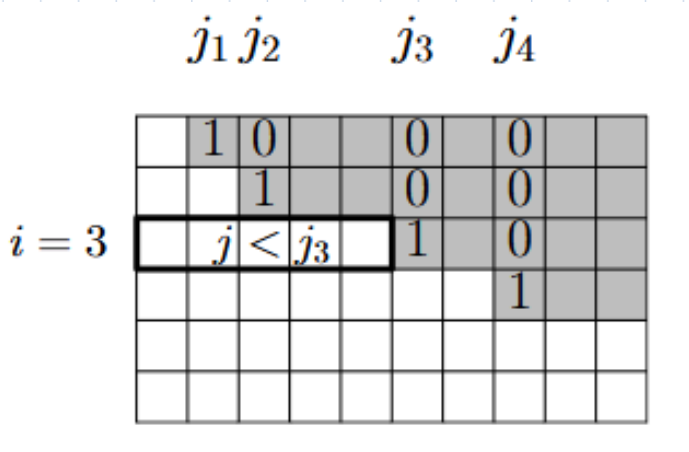
Lemma 3.14

R in RREF$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ has independent columns $j_1, j_2, \ldots, j_r$ and rank r.

Spalten einer Matrix in RREF

Lemma 3.14

R in RREF$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ has independent columns $j_1, j_2, \ldots, j_r$ and rank r.



- Die Stufenspalten $j_1, \ldots, j_r$ sind genau die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ — also unabhängig.
- Jede andere Spalte hat nur in den ersten r Zeilen Einträge, ist also eine Linearkombination der Stufenspalten links von ihr — also abhängig.
- Darum: rang(R) = r = Anzahl Stufen.

Aufgabe

Sei $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) R ist in RREF$(j_1, \ldots, j_r)$. Bestimme $j_1, \ldots, j_r$ und r.

(b) Welche Spalten von R sind unabhängig, und was ist rang(R)?

(c) Schreibe die Spalten 1, 3 und 5 als Linearkombinationen der Spalten $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, die in den Stufenspalten stehen.

(d) Warum ist Spalte 1 abhängig, obwohl links von ihr gar keine Spalten stehen?

Gauss-Jordan liefert die Matrix M

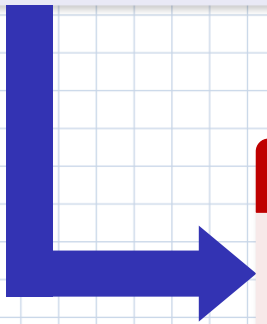
Theorem 3.17

Let A be an $m \times n$ matrix, and let $(R, j_1, j_2, \ldots, j_r, M)$ be the output of Algorithm 6 with input (A, I). Then M is invertible, $R = MA$, and R is in $\mathrm{RREF}(j_1, j_2, \ldots, j_r)$.

Gauss-Jordan liefert die Matrix M

Theorem 3.17

Let A be an $m \times n$ matrix, and let $(R, j_1, j_2, \ldots, j_r, M)$ be the output of Algorithm 6 with input (A, I). Then M is invertible, $R = MA$, and R is in RREF$(j_1, j_2, \ldots, j_r)$.



- Gauss-Jordan mit Eingabe (A, I) wendet jede Zeilenoperation auch auf I an — rechts sammelt sich so das Produkt aller Zeilenoperationen: M.
- Dieses M bringt A direkt in reduzierte Zeilenstufenform: $R = MA$.
- M ist invertierbar, weil jede Zeilenoperation rückgängig gemacht werden kann.

Aufgabe

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(a) Führe Algorithmus 6 mit Eingabe (A, I) aus und bestimme $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$.

(b) Überprüfe $MA = R$ durch Ausmultiplizieren.

(c) Berechne M^{-1} und vergleiche mit den Spalten $j_1, \ldots, j_r$ von A. Was fällt auf?

Eindeutigkeit der RREF

Satz 3.18 (Eindeutigkeit der RREF, Bezug zur CR-Zerlegung)

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Es gibt genau eine $m \times n$-Matrix R (die aus Gauss-Jordan auf A nach Satz 3.17) mit den zwei Eigenschaften:

(i) $R = MA$ für eine invertierbare $m \times m$-Matrix M.

(ii) R ist in RREF.

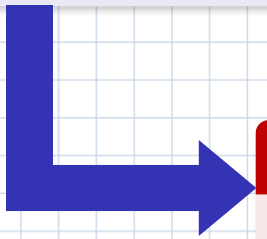
Eindeutigkeit der RREF

Satz 3.18 (Eindeutigkeit der RREF, Bezug zur CR-Zerlegung)

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Es gibt genau eine $m \times n$-Matrix R (die aus Gauss-Jordan auf A nach Satz 3.17) mit den zwei Eigenschaften:

(i) $R = MA$ für eine invertierbare $m \times m$-Matrix M.

(ii) R ist in RREF.



In anderen Worten:

- Egal mit welchen Zeilenoperationen man A umformt: Am Ende steht immer dieselbe RREF.
- Bezug zur CR-Zerlegung: C = die Stufenspalten von A, R' = die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R.

Inverse mit Gauss-Jordan

Theorem 3.19

Computing the inverse of A: Run Gauss-Jordan on $(A, I) \to (R, M)$.

A invertible $\Leftrightarrow R = I$ (and then $M = A^{-1}$).

Inverse mit Gauss-Jordan

Theorem 3.19

Computing the inverse of A: Run Gauss-Jordan on $(A, I) \to (R, M)$.

A invertible $\Leftrightarrow R = I$ (and then $M = A^{-1}$).

- Beispiel aus letzter Woche (ab Folie 90)

Aufgabe

(a) Berechne mit Gauss-Jordan auf (A, I) die Inverse von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

und überprüfe $AA^{-1} = I$.

(b) Führe Gauss-Jordan auf

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aus (nur die linke Seite). Ist A' invertierbar? Begründe mit Satz 3.19.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern.

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind.

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf.

(iv) $C(A) = C(R)$.

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist.

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$.

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ✗

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind.

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf.

(iv) $C(A) = C(R)$.

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist.

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$.

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ❌

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind. ✅

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf.

(iv) $C(A) = C(R)$.

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist.

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$.

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ✗

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind. ✓

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf. ✓

(iv) $C(A) = C(R)$.

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist.

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$.

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ✗

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind. ✓

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf. ✓

(iv) $C(A) = C(R)$. ✗

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist.

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$.

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ✗

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind. ✓

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf. ✓

(iv) $C(A) = C(R)$. ✗

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist. ✓

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$.

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ✗

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind. ✓

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf. ✓

(iv) $C(A) = C(R)$. ✗

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist. ✓

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$. ✓

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

Wahr oder Falsch? (Gauss-Jordan auf (A, I))

Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Begründe kurz oder gib ein Gegenbeispiel.

(i) Gauss-Jordan-Elimination kann scheitern. ✗

(ii) $\text{rang}(A)$ ist gleich der Anzahl Zeilen von R, die nicht null sind. ✓

(iii) $R(A) = R(R)$, d. h. die Zeilen $\neq \mathbf{0}$ von R spannen den Zeilenraum von A auf. ✓

(iv) $C(A) = C(R)$. ✗

(v) Ist $m < n$, so hat R mindestens eine Spalte, die keine Stufenspalte ist. ✓

(vi) Ist $A \in \mathbb{R}^{mxm}$ und scheitert Gauss-Elimination (Algorithmus 2), so ist $R \neq I$. ✓

(vii) Hat R eine Nullzeile, so gibt es ein $\mathbf{b}$, für das $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat. ✓

Aufgabe

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = r$, und sei $(R, j_1, \ldots, j_r, M)$ das Resultat von Gauss-Jordan auf (A, I). Wir beweisen:

(1) Ist $r = m$, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ mindestens eine Lösung.

(2) Ist $r = n$, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ höchstens eine Lösung.

(a) Zeige: Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ gilt $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff R\mathbf{x} = M\mathbf{b}$.

(b) Sei $r = m$. Warum hat R dann keine Nullzeile? Folgere (1).

(c) Sei $r = n$. Zeige, dass dann jede Spalte von R eine Stufenspalte ist, also Spalte j von R gleich $\mathbf{e}_j$ ist.

(d) Sei weiterhin $r = n$, und seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zwei Lösungen von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Zeige, dass $R(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Folgere mit (c), dass alle Komponenten von $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ null sind, und damit (2).

(e) Folgere: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $\operatorname{rang}(A) = m$ hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b}$ genau eine Lösung.

Vektorraum (axiomatische Definition)

Definition 4.1

Ein (reeller) Vektorraum ist eine Menge V (die *Vektoren*), die mit zwei linearen Operationen ausgestattet und *abgeschlossen* unter ihnen ist:

Vektoraddition:	$\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$	für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,
Skalarmultiplikation:	$\lambda\mathbf{v} \in V$	für alle $\mathbf{v} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$,

und die folgenden *Axiome* (Regeln) erfüllt.

Axiome (für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

1.	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$	Kommutativität
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Assoziativität
3.	Es gibt $\mathbf{0}$ mit $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v}$	Nullvektor
4.	Es gibt $-\mathbf{v}$ mit $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	inverses Element
5.	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$	neutrales Element
6.	$(\lambda \cdot \mu)\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$	Verträglichkeit
7.	$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$	Distributivität über +
8.	$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$	Distributivität über + in $\mathbb{R}$

Vektorraum (axiomatische Definition)

Definition 4.1

Ein (reeller) Vektorraum ist eine Menge V (die *Vektoren*), die mit zwei linearen Operationen ausgestattet und *abgeschlossen* unter ihnen ist:

Vektoraddition:	$\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$	für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,
Skalarmultiplikation:	$\lambda\mathbf{v} \in V$	für alle $\mathbf{v} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$,

und die folgenden *Axiome* (Regeln) erfüllt.

Axiome (für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

1.	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$	Kommutativität
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Assoziativität
3.	Es gibt $\mathbf{0}$ mit $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v}$	Nullvektor
4.	Es gibt $-\mathbf{v}$ mit $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	inverses Element
5.	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$	neutrales Element
6.	$(\lambda \cdot \mu)\mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})$	Verträglichkeit
7.	$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$	Distributivität über +
8.	$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$	Distributivität über + in $\mathbb{R}$

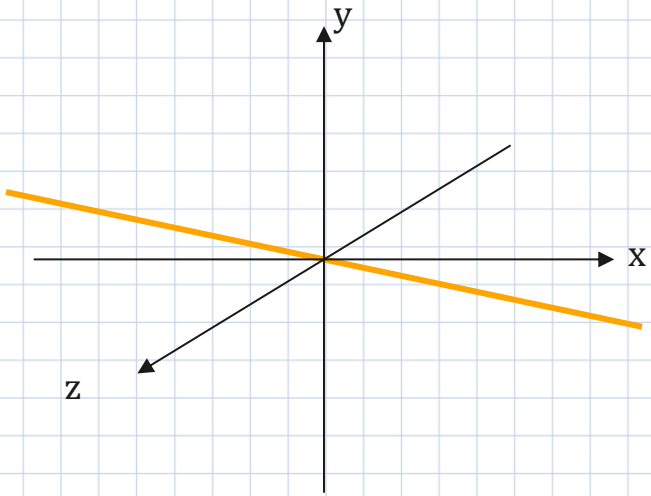
Exercise 4.10

Let V be a vector space, $\mathbf{v} \in V$. Then $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

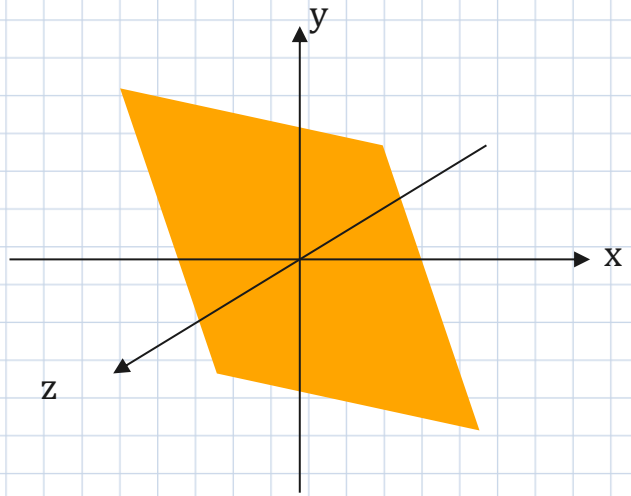
Unterräume

Definition 4.11

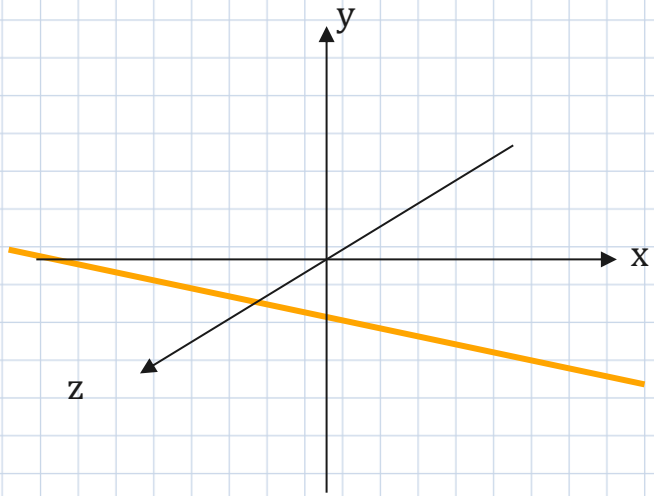
Sei V ein Vektorraum. Ein *Unterraum* von V ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, die selbst ein Vektorraum ist — mit denselben linearen Operationen wie V.



Gerade durch $\mathbf{0}$: Unterraum



Ebene durch $\mathbf{0}$: Unterraum



Gerade nicht durch $\mathbf{0}$: kein Unterraum

Beispiele in $\mathbb{R}^3$: Ein Unterraum ist ein „kleinerer Lebensraum“ im grossen Raum V. Er muss immer $\mathbf{0}$ enthalten.

Das Unterraumkriterium

Lemma 4.12 (Unterraumkriterium)

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

(i) U ist ein Unterraum von V.

(ii) U ist nicht leer, und für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Vektoraddition),

(b) $\lambda \mathbf{v} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Skalarmultiplikation).

Das Unterraumkriterium

Lemma 4.12 (Unterraumkriterium)

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

(i) U ist ein Unterraum von V.

(ii) U ist nicht leer, und für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Vektoraddition),

(b) $\lambda \mathbf{v} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Skalarmultiplikation).

Nutzt das Lemma, um zu zeigen, dass U ein Unterraum ist!

Das Unterraumkriterium

Lemma 4.12 (Unterraumkriterium)

Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

(i) U ist ein Unterraum von V.

(ii) U ist nicht leer, und für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Vektoraddition),

(b) $\lambda \mathbf{v} \in U$ (U ist abgeschlossen unter Skalarmultiplikation).

Rezept, um zu zeigen, dass U ein Unterraum ist:

- **1.** $U \neq \emptyset$ — am einfachsten: zeige $\mathbf{0} \in U$.
- **2.** Nimm $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ beliebig und zeige $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$.
- **3.** Nimm $\mathbf{v} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig und zeige $\lambda \mathbf{v} \in U$.

(Die 8 Axiome muss man dann nicht mehr prüfen!)

In-class

2. Subspaces of function spaces and $\mathbb{R}^{m\times m}$ (in-class) (★☆☆)

a) In this exercise we consider the vector space V of all real-valued functions on the interval $[0,1]$. In other words, every element $\mathrm{f} \in V$ is a function $\mathrm{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ and conversely, every function $\mathrm{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is in V. Note that it might not be obvious that this is a vector space, but for the purpose of this exercise you can assume that it is. In particular, there exists a valid addition $\mathrm{f} + \mathrm{g}$ of such functions $\mathrm{f} \in V$ and $\mathrm{g} \in V$, and a valid scalar multiplication $c\mathrm{f}$ for a scalar $c \in \mathbb{R}$ and $\mathrm{f} \in V$ defined as follows:

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(x) \coloneqq \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x) \qquad \text{for all } \mathrm{f}, \mathrm{g} \in V \text{ and } x \in [0,1]$$
$$(c\mathrm{f})(x) \coloneqq c\mathrm{f}(x) \qquad \text{for all } \mathrm{f} \in V, x \in [0,1] \text{ and } c \in \mathbb{R}.$$

Prove that

$$U = \{\mathrm{f} \in V : \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(1-x) \text{ for all } x \in [0,1]\} \subseteq V$$

is a subspace of V.

Basis eines Vektorraums

Definition 4.21

Sei V ein Vektorraum. Eine Familie $B = (\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heisst *Basis* von V, wenn

(i) B linear unabhängig ist und

(ii) B den Raum V erzeugt.

Basis eines Vektorraums

Definition 4.21

Sei V ein Vektorraum. Eine Familie $B = (\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heisst *Basis* von V, wenn
(i) B linear unabhängig ist und
(ii) B den Raum V erzeugt.

In anderen Worten:

- (i) linear unabhängig: Kein Basisvektor ist überflüssig.

Basis eines Vektorraums

Definition 4.21

Sei V ein Vektorraum. Eine Familie $B = (\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heisst *Basis* von V, wenn
(i) B linear unabhängig ist und
(ii) B den Raum V erzeugt.

In anderen Worten:

- (i) linear unabhängig: Kein Basisvektor ist überflüssig.
- (ii) erzeugt V: Jeder Vektor aus V ist eine Linearkombination der $\mathbf{v}_i$.

Basis eines Vektorraums

Definition 4.21

Sei V ein Vektorraum. Eine Familie $B = (\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heisst *Basis* von V, wenn
(i) B linear unabhängig ist und
(ii) B den Raum V erzeugt.

In anderen Worten:

- (i) linear unabhängig: Kein Basisvektor ist überflüssig.
- (ii) erzeugt V: Jeder Vektor aus V ist eine Linearkombination der $\mathbf{v}_i$.
- Zusammen: Jeder Vektor aus V lässt sich auf **genau eine** Weise als Linearkombination der Basisvektoren schreiben.

Basis eines Vektorraums

Definition 4.21

Sei V ein Vektorraum. Eine Familie $B = (\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heisst *Basis* von V, wenn
(i) B linear unabhängig ist und
(ii) B den Raum V erzeugt.

Vektorraum V	Basis B
$\mathbb{R}^m$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$
Spaltenraum $C(A)$ (Unterraum von $\mathbb{R}^m$)	unabhängige Spalten von A
symmetrische 2×2-Matrizen (Unterraum von $\mathbb{R}^{2x2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2×2-Matrizen mit Spur 0 (Unterraum von $\mathbb{R}^{2x2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbb{R}[x]$ (Polynome)	$(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ (unendliche Familie)
Polynome ohne konstanten Term (Unterraum von $\mathbb{R}[x]$)	$(x^i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ (unendliche Familie)
quadratische Funktionen (Unterraum von $\mathbb{R}[x]$)	$x^2, x, 1$
$\{\mathbf{0}\}$ (kleinster Vektorraum)	$()$ (leere Familie)

Basis eines Vektorraums

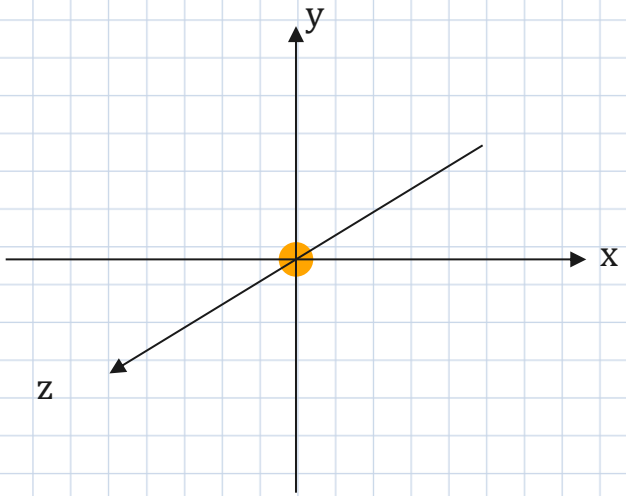
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektorraum V	Basis B
$\mathbb{R}^m$	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$
Spaltenraum $C(A)$ (Unterraum von $\mathbb{R}^m$)	unabhängige Spalten von A
symmetrische 2×2-Matrizen (Unterraum von $\mathbb{R}^{2x2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2×2-Matrizen mit Spur 0 (Unterraum von $\mathbb{R}^{2x2}$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbb{R}[x]$ (Polynome)	$(x^i)_{i \in \mathbb{N}}$ (unendliche Familie)
Polynome ohne konstanten Term (Unterraum von $\mathbb{R}[x]$)	$(x^i)_{i \in \mathbb{N}^+}$ (unendliche Familie)
quadratische Funktionen (Unterraum von $\mathbb{R}[x]$)	$x^2, x, 1$
$\{\mathbf{0}\}$ (kleinster Vektorraum)	$()$ (leere Familie)

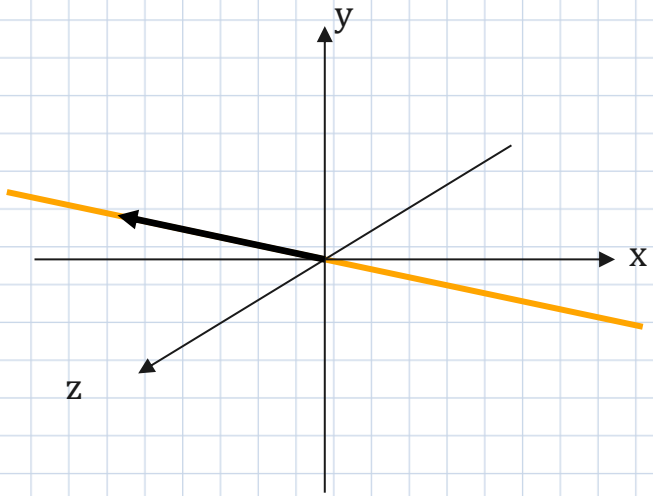
Dimension

Definition 4.28

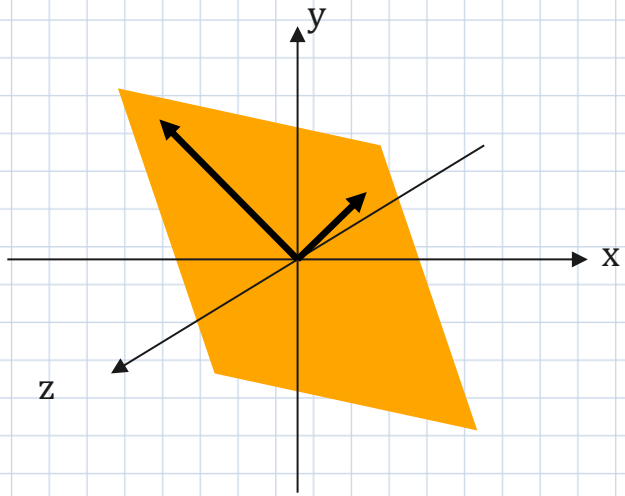
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann ist $\dim(V)$ (die *Dimension* von V) die Grösse einer beliebigen Basis von V.



Dimension 0



Dimension 1



Dimension 2

Die schwarzen Pfeile bilden jeweils eine Basis: 0, 1 bzw. 2 Vektoren.

In-class

b) Let $m \in \mathbb{N}^+$. Consider the set $\mathcal{D}_m$ of diagonal $m \times m$ matrices, which is a subspace of $\mathbb{R}^{m \times m}$. What is the dimension of $\mathcal{D}_m$? Justify your answer with a proof.

Steinitz-Austauschlemma

Lemma 4.26

Sei V ein Vektorraum, seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ linear unabhängig, und seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in V$ so, dass sie V erzeugen. Dann gilt $m \leq n$, und man kann m der $\mathbf{w}_i$ so durch die $\mathbf{v}_j$ ersetzen, dass die entstehende Folge V immer noch erzeugt.

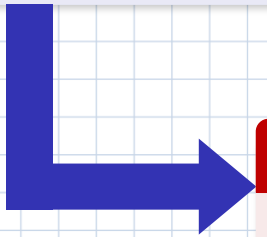
Steinitz-Austauschlemma

Lemma 4.26

Sei V ein Vektorraum, seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ linear unabhängig, und seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in V$ so, dass sie V erzeugen. Dann gilt:

(i) $m \leq n$

(ii) man kann m der $\mathbf{w}_i$ so durch die $\mathbf{v}_j$ ersetzen, dass die entstehende Folge V immer noch erzeugt.



In anderen Worten:

Sei $F \subseteq V$ eine endliche Menge **linear unabhängiger** Vektoren $(|F| = m)$

Sei $G \subseteq V$ eine endliche Menge mit **Span**$(G) = V$. $(|G| = n)$

Dann gilt:

(i) $|F| \leq |G|$ — es gibt nie mehr unabhängige als erzeugende Vektoren.

(ii) Es gibt eine Teilmenge $E \subseteq G$ der Grösse $|G| - |F|$ mit **Span**$(F \cup E) = V$

Steinitz-Austauschlemma

Lemma 4.26

Sei V ein Vektorraum, seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ linear unabhängig, und seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in V$ so, dass sie V erzeugen. Dann gilt:

(i) $m \leq n$

(ii) man kann m der $\mathbf{w}_i$ so durch die $\mathbf{v}_j$ ersetzen, dass die entstehende Folge V immer noch erzeugt.

Sei V ein Unterraum mit dim(V) = 3, wahr oder falsch?

(i) Jede spannende Familie von V hat mindestens 3 Vektoren.

(ii) Je drei linear unabhängige Vektoren in V bilden eine Basis.

Steinitz-Austauschlemma

Lemma 4.26

Sei V ein Vektorraum, seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ linear unabhängig, und seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in V$ so, dass sie V erzeugen. Dann gilt:

(i) $m \leq n$

(ii) man kann m der $\mathbf{w}_i$ so durch die $\mathbf{v}_j$ ersetzen, dass die entstehende Folge V immer noch erzeugt.

Sei V ein Unterraum mit dim(V) = 3, wahr oder falsch?

(i) Jede spannende Familie von V hat mindestens 3 Vektoren. ✓

(ii) Je drei linear unabhängige Vektoren in V bilden eine Basis.

Steinitz-Austauschlemma

Lemma 4.26

Sei V ein Vektorraum, seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ linear unabhängig, und seien $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in V$ so, dass sie V erzeugen. Dann gilt:

(i) $m \leq n$

(ii) man kann m der $\mathbf{w}_i$ so durch die $\mathbf{v}_j$ ersetzen, dass die entstehende Folge V immer noch erzeugt.

Sei V ein Unterraum mit dim(V) = 3, wahr oder falsch?

(i) Jede spannende Familie von V hat mindestens 3 Vektoren. ✓

(ii) Je drei linear unabhängige Vektoren in V bilden eine Basis. ✓

Korollar

Es folgt, dass jede Basis die gleiche Kardinalität hat