

Lineare Algebra

KW 43



Nina Gassner

Willkommen zurück! :D

Quiz Tiime :D yaay



Willkommen zurück! :D

well done !!!



Willkommen zurück! :D

Bemerkung zum Hand-In



Gauss-Elimination

recap / Überblick ! :D
auf linalg.guru



Gauss-Elimination

Let's quickly prove this fact we have already seen in Kahoot last week :D

Lemma 3.5 (Invariance of the row space): A, M as before. Then A and MA have the same row space, $\mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(MA)$ (see exercise sessions).

However, $\mathbf{C}(A) \neq \mathbf{C}(MA)$ in general (see exercise sessions).



Gauss-Elimination

... umformuliert

Aufgabe

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix und $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine invertierbare Matrix.
Zeige, dass gilt: $R(A) = R(MA)$



Gauss-Elimination

... umformuliert

Aufgabe

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix und $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine invertierbare Matrix.
Zeige, dass gilt: $R(A) = R(MA)$

$$C(A) \stackrel{?}{=} C(MA)$$



Gauss-Elimination

... umformuliert

Aufgabe

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix und $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine invertierbare Matrix.
Zeige, dass gilt: $R(A) = R(MA)$

$$C(A) \stackrel{?}{=} C(MA)$$

$$\text{n\"o\"o: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Gauss-Elimination

side note:

verallgemeinert kann man sogar sagen:

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt allgemein:

$R(MA) = R(A)$ falls $M \in \mathbb{R}^{p \times m}$ linear unabhängige Spalten hat.

$C(AM) = C(A)$ falls $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ linear unabhängige Zeilen hat.

Es gibt später sehr schöne Beweise dazu, die wir uns dann ansehen können :D
yaaayyy



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{array} \right] \rightarrow$$



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & | & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{array} \right] \rightarrow$$



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 4 \\ 3 & 2 & | & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & | & 12 \\ 6 & 4 & | & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 & | & 12 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$



Gauss-Elimination

Theorem 3.7: Let $Ax = \mathbf{b}$ be a system of m linear equations in m variables. The following two statements are equivalent.

- (i) Gauss elimination as in Algorithm 2 succeeds.
- (ii) The columns of A are linearly independent.



Gauss-Elimination

Theorem 3.7: Let $Ax = b$ be a system of m linear equations in m variables. The following two statements are equivalent.

- (i) Gauss elimination as in Algorithm 2 succeeds.
- (ii) The columns of A are linearly independent.

-> Karte! :D



Gauss-Elimination

[Quantor] $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt: Die Gauss–Elimination für $Ax = b$ funktioniert mit $b = 0$.

Was ist der Quantor?

a) $\exists$



Gauss-Elimination

Wie viele Lösungen kann $Ax = b$ haben, wenn die Gauss-Elimination für $Ax = b$ (A quadratisch) nicht funktioniert?

- a) keine Lösung
- b) eine Lösung
- c) mehrere Lösungen



Gauss-Elimination

Wie viele Lösungen kann $Ax = b$ haben, wenn die Gauss-Elimination für $Ax = b$ (A quadratisch) nicht funktioniert?

- a) keine Lösung
- b) eine Lösung
- c) mehrere Lösungen



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \rightarrow$$



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 2 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right] \rightarrow$$



Gauss-Elimination

ein paar Beispiele :)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



Gauss-Elimination

Let's practice rewriting problems, so we can use this wonderful method! :D



Gauss-Elimination

aus FS25...

a) Consider the two linearly independent vectors

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$. Write down a vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ that satisfies the conditions

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{u}^\top \mathbf{x} = \mathbf{v}^\top \mathbf{x} = 1.$$

/1 ·6



Gauss-Elimination

dazu ähnlich ...

Aufgabe

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme $x \in \mathbb{R}^3$ mit:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 2, \quad u^\top x = -1, \quad v^\top x = 7$$

bzw: Überlege, wie man die Bestimmung von x mit Gauss-Elimination anwenden kann! :D



Gauss-Elimination

dazu ähnlich ...

Aufgabe

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme $x \in \mathbb{R}^3$ mit:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 2, \quad u^\top x = -1, \quad v^\top x = 7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right]$$

bzw: Überlege, wie man die Bestimmung von x mit Gauss-Elimination anwenden kann! :D



Gauss-Elimination

1. **Interpolation (in-class (★☆☆))** Assume that you have collected the following data points

x	y
0	1
2	2
4	5
6	6

and you want to find a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that interpolates them, i.e. f should satisfy $f(x) = y$ for all pairs of x, y given by the table above. There is an abundance of functions that you can try and in particular, there are many different functions that do interpolate the four datapoints. In this exercise, we are interested in polynomials, i.e. we restrict f to be a polynomial of degree at most 3. In particular, this means that f has the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ for some $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Your task is to find values for a, b, c, d such that f interpolates all four points given in the table.



Gauss-Elimination

1. Interpolation (in-class (★☆☆)) Assume that you have col

x	y
0	1
2	2
4	5
6	6

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

and you want to find a function $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that interpolates them, i.e. f should satisfy $f(x) = y$ for all pairs of x, y given by the table above. There is an abundance of functions that you can try and in particular, there are many different functions that do interpolate the four datapoints. In this exercise, we are interested in polynomials, i.e. we restrict f to be a polynomial of degree at most 3. In particular, this means that f has the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ for some $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Your task is to find values for a, b, c, d such that f interpolates all four points given in the table.



bis nächste Woche!



<https://linalg.guru>

