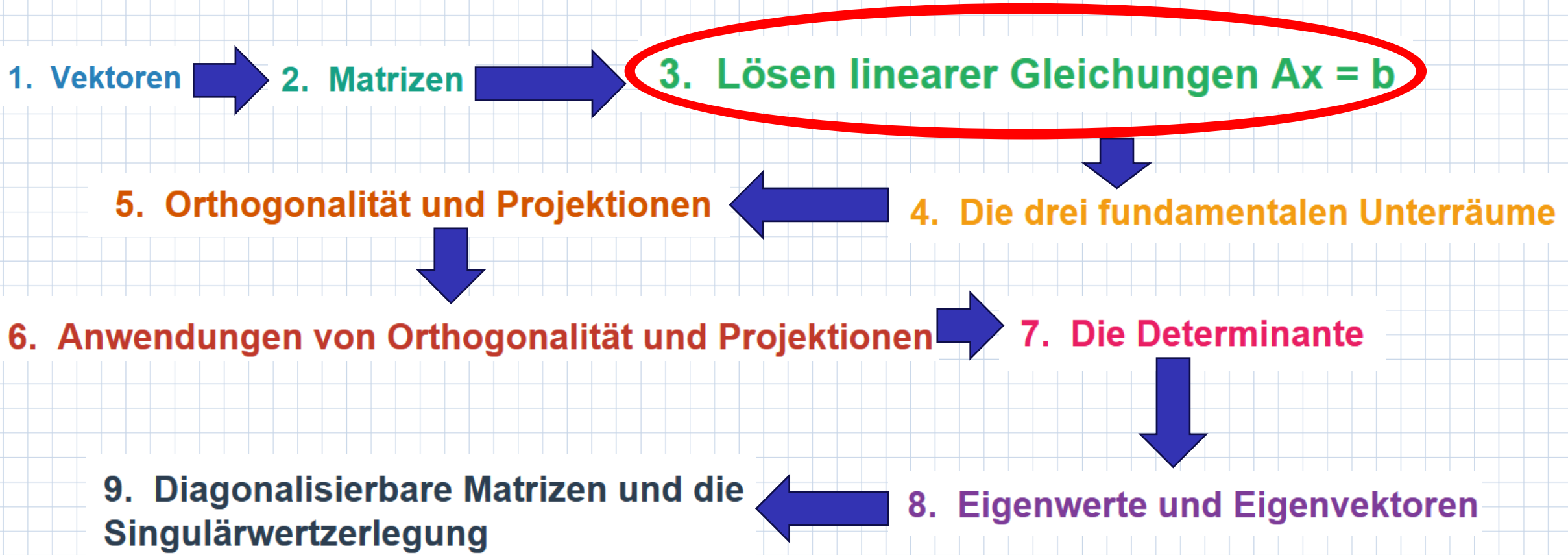
Linear Algebra

Week 5 — Gauss Elimination

Joshua Gao
HS26

Roadmap


1. Vektoren
2. Matrizen
3. Lösen linearer Gleichungen Ax = b
4. Die drei fundamentalen Unterräume
5. Orthogonalität und Projektionen
6. Anwendungen von Orthogonalität und Projektionen
7. Die Determinante
8. Eigenwerte und Eigenvektoren
9. Diagonalisierbare Matrizen und die Singulärwertzerlegung

Feedback

- a) 👍 👍 👍
- b) 👍 👍 👍
- c) $B\text{-}C \neq 0$ und $(B\text{-}C)A = 0$ implizieren **nicht** $A = 0$

Nachtrag

Wie zeigen wir, dass B die Inverse von A ist?

Nachtrag

Wie zeigen wir, dass B die Inverse von A ist?

Definition 2.57 (Inverse Matrix)

Let A be an m × m matrix. A is invertible if and only if there exists an m × m matrix B such that BA = I (or AB = I, or AB = BA = I). In this case, there is exactly one such matrix B, called the inverse of A. We denote it by A^{-1}.

Nachtrag

Wie zeigen wir, dass B die Inverse von A ist?

Definition 2.57 (Inverse Matrix)

Let A be an m × m matrix. A is invertible if and only if there exists an m × m matrix B such that BA = I (or AB = I, or AB = BA = I). In this case, there is exactly one such matrix B, called the inverse of A. We denote it by A^{-1}.

Das heisst:

Wir wollen zeigen dass BA = I oder AB = I gilt

Beweis zu Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.58

Let A and B be invertible m × m matrices. Then AB is also invertible, and:

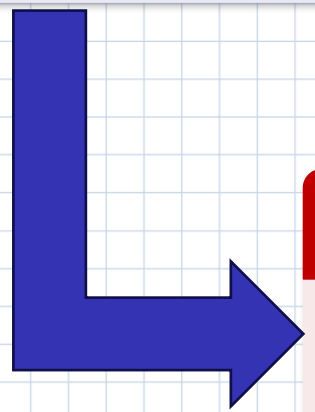
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Beweis zu Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.58

Let A and B be invertible m × m matrices. Then AB is also invertible, and:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$



Zu zeigen

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

Beweis zu Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.58

Let A and B be invertible m × m matrices. Then AB is also invertible, and:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Beweis zu Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.59

Let A be an invertible m×m matrix. Then the transpose A^T is also invertible, and:

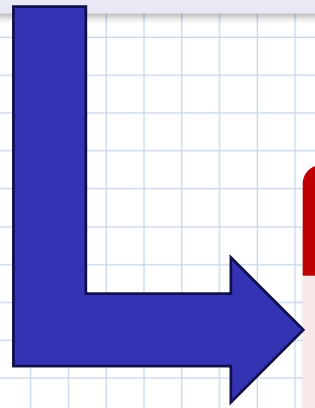
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Beweis zu Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.59

Let A be an invertible m×m matrix. Then the transpose A^T is also invertible, and:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$



Zu zeigen

$$(A^{-1})^T A^T = I$$

Nachtrag

Beweis zu Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.59

Let A be an invertible m×m matrix. Then the transpose A^T is also invertible, and:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$\left(A^{-1}\right)^{\top} A^{\top} = \left(AA^{-1}\right)^{\top} = I^{\top} = I,$$

Wiederholung

Wie zeigen wir, dass A symmetrisch ist?

Moreover, a square matrix A is symmetric (Definition 2.3) if and only if $A = A^\top$.

Wiederholung

Wie zeigen wir, dass A symmetrisch ist?

Moreover, a square matrix A is symmetric (Definition 2.3) if and only if $A = A^\top$.

Das heisst:

Wir wollen zeigen, dass $A^T = A$ oder $A = A^T$ gilt

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar. Beweise:

(a) Ist A symmetrisch, so ist auch A^{-1} symmetrisch.

(b) A^2 ist invertierbar und $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, wobei A und B invertierbar sind.

(a) Vereinfache $\left((A^{-1})^\top\right)^{-1}$.

(b) Vereinfache $A^\top (A^{-1})^\top B$.

(c) Bestimme alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit

$$A^\top X B = C.$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar.

(a) Zeige, dass $A^\top A$ symmetrisch ist.

(b) Zeige, dass $A^\top A$ invertierbar ist.

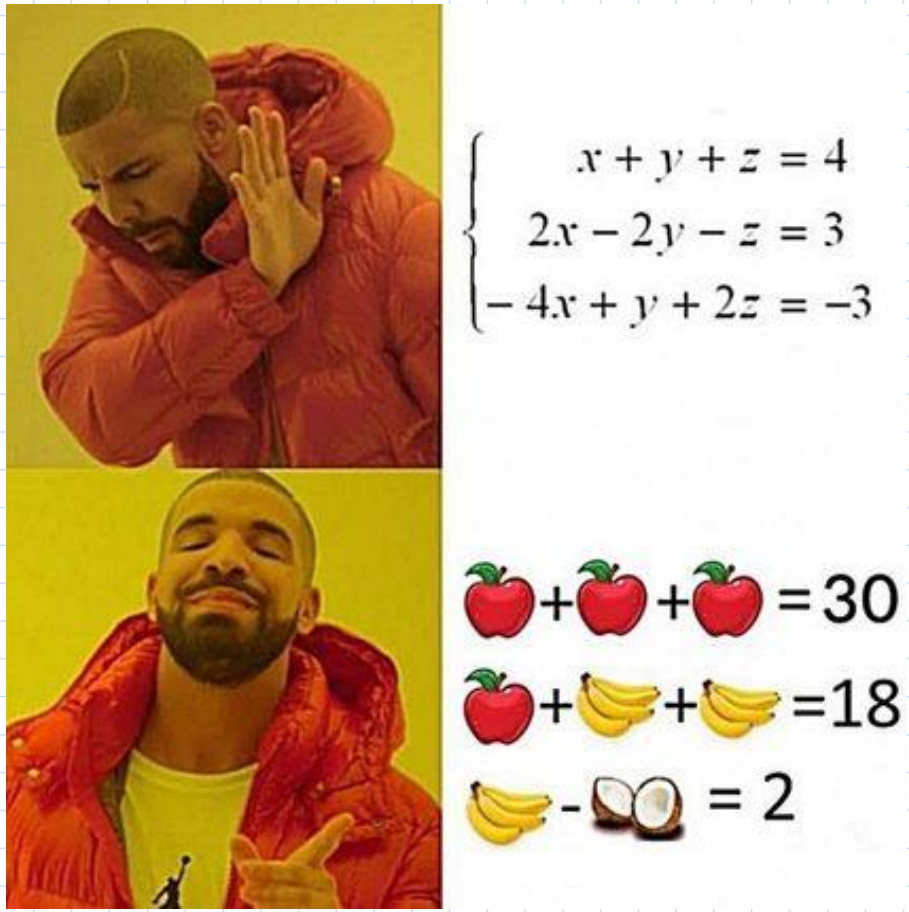
(c) Zeige, dass $(A^\top A)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^\top$, und überprüfe direkt, dass diese Matrix symmetrisch ist.

(d) Sei zusätzlich $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch und invertierbar. Zeige, dass $M := A^\top S A$ symmetrisch und invertierbar ist, und gib M^{-1} an, sodass darin nur A^{-1}, S^{-1} und Transponierte vorkommen.

Lineare Gleichungssysteme

Definition 3.1: A *system of linear equations* in m equations and n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is of the form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$



Lineare Gleichungssysteme

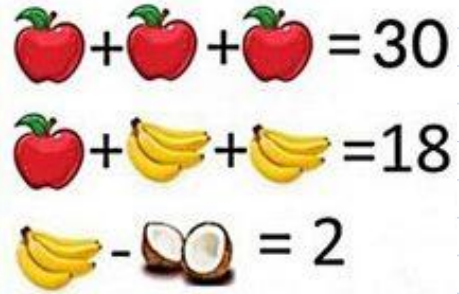
Definition 3.1: A *system of linear equations* in m equations and n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ is of the form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

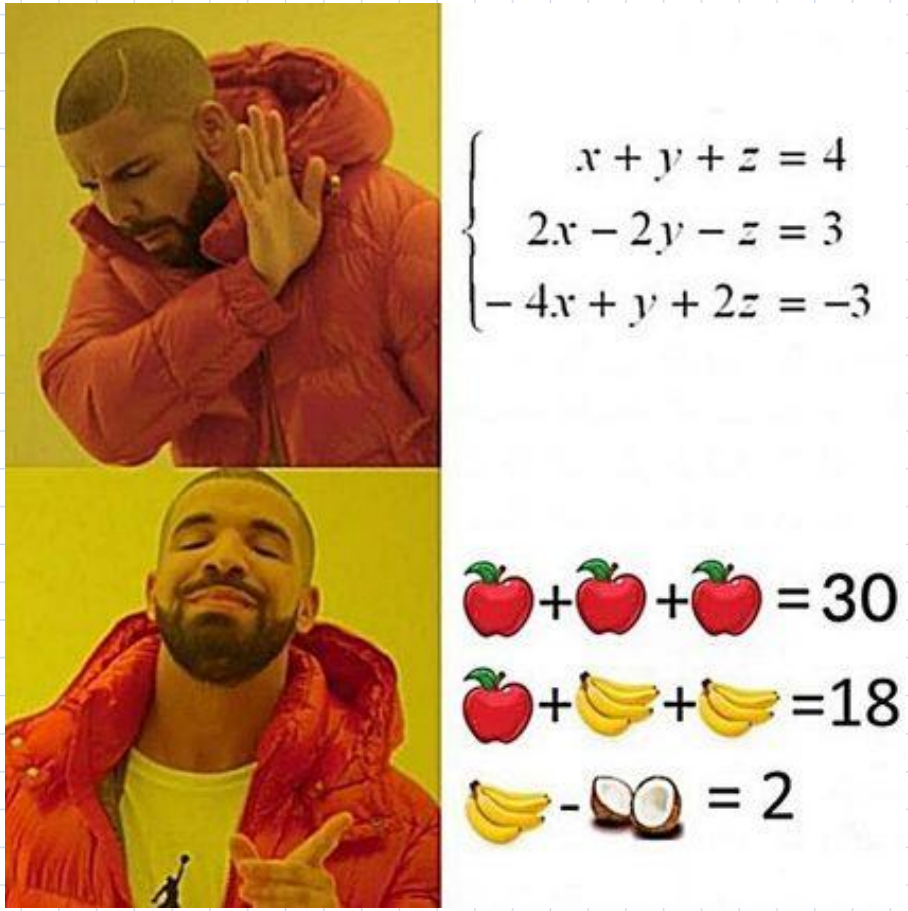
Wir können jedes lineare Gleichungssystem auch als Matrix-Vektor Multiplikation anschreiben

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}: \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A,\ m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 2y - z = 3 \\ -4x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

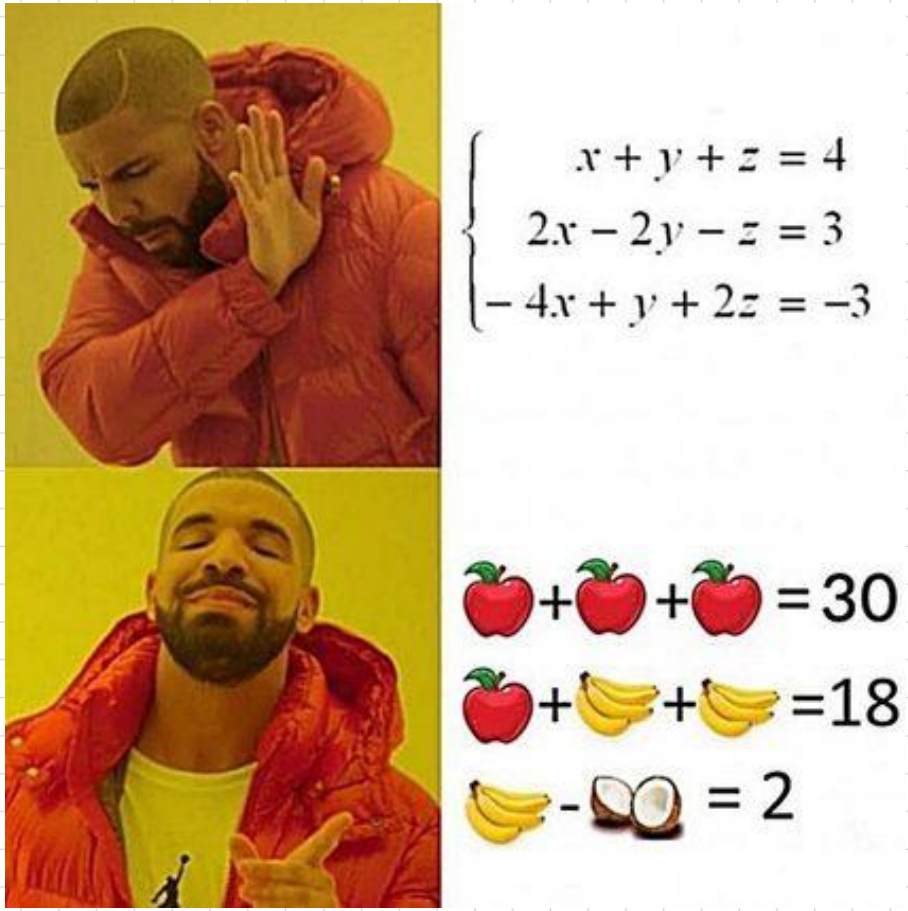


Lineare Gleichungssysteme



<= wie können wir dieses Gleichungssystem als Matrix-Vektor Multiplikation anschreiben?

Lineare Gleichungssysteme



<= wie können wir dieses Gleichungssystem als Matrix-Vektor Multiplikation anschreiben?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Gauss Elimination

Zwei wichtige Matrizen (von links muliplizierter)

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Zwei wichtige Matrizen (von links muliplizierter)

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Zwei wichtige Matrizen (von links muliplizierter)

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bedeutung

Addiere -2 Mal Zeile 1 zu Zeile 2

Gauss Elimination

Zwei wichtige Matrizen (von links mulipliziert)

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bedeutung

Addiere -2 Mal Zeile 1 zu Zeile 2

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix} \end{array}$$

Allgemein

Zeile 3 soll als lineare Kombination von x * Zeile 1 + y * Zeile 2 + z * Zeile 3 angegeben werden

Gauss Elimination

Zwei wichtige Matrizen (von links mulipliziert)

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Zwei wichtige Matrizen (von links muliplizierter)

Bedeutung

Vertausche Zeile 1 mit Zeile 2

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Wie sieht die Inverse aus?

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Wie sieht die Inverse aus?

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Inverse existiert immer weil wir dieselbe Zeile wieder subtrahieren können oder die Zeilen wieder vertauschen können.

Gauss Elimination

Was passiert wenn wir von rechts multiplizieren?

Gauss Elimination

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Eliminationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bedeutung

Addiere -2 Mal Spalte 2 zu Spalte 1

Gauss Elimination

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Bedeutung

Vertausche Spalte 1 mit Spalte 2

Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination

Back substitution to compute x_4, x_3, x_2, x_1

Matrix vector form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

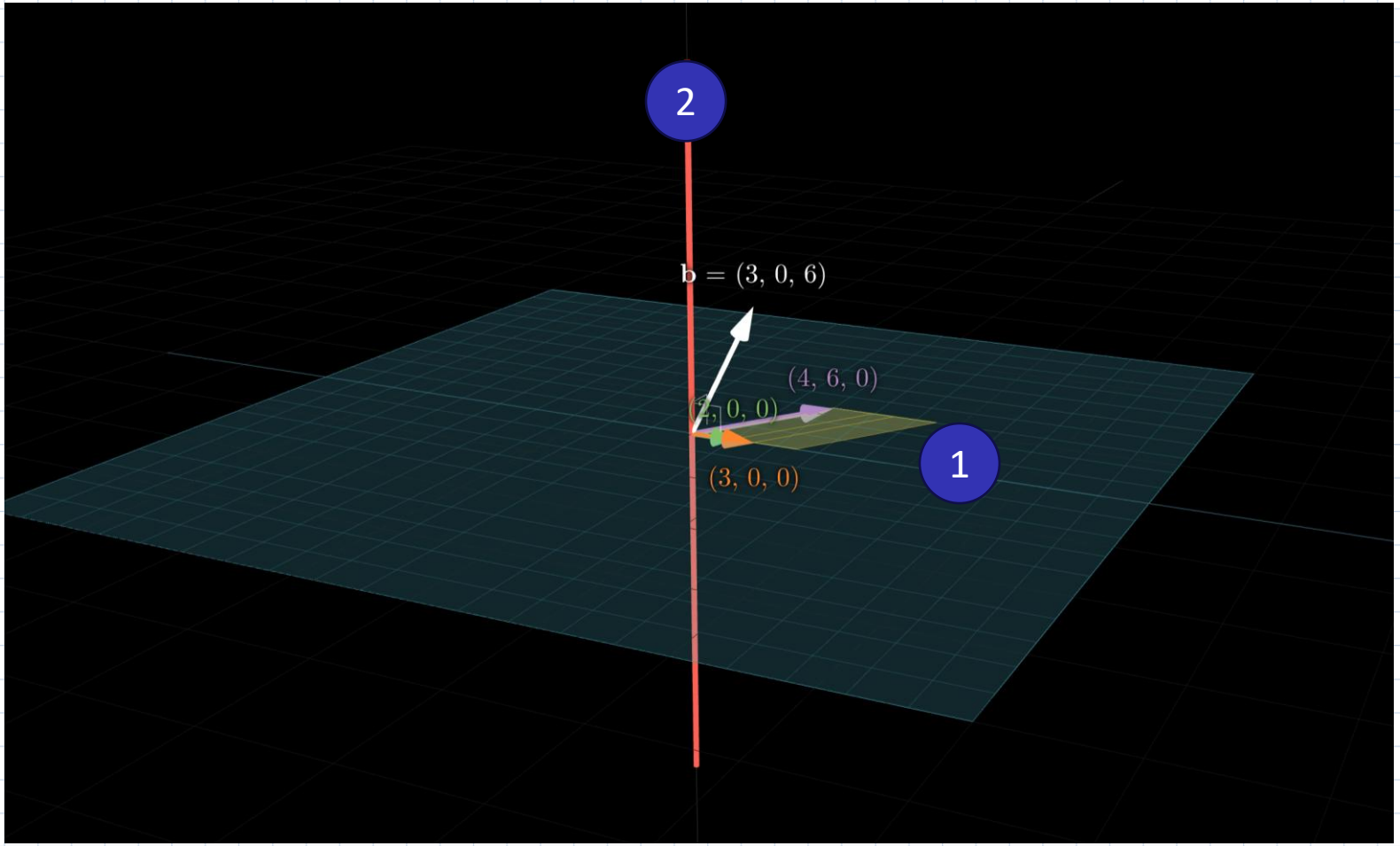
System of linear equations

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +1x_2 & -1x_3 & +2x_4 & = & 5 \\ & 3x_2 & -1x_3 & +2x_4 & = & -1 \\ & & -1x_3 & +4x_4 & = & 11 \\ & & & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

No row exchange possible: Give up!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -7 \\ -15 \end{bmatrix}$$

N(A), C(A) oder R(A)?

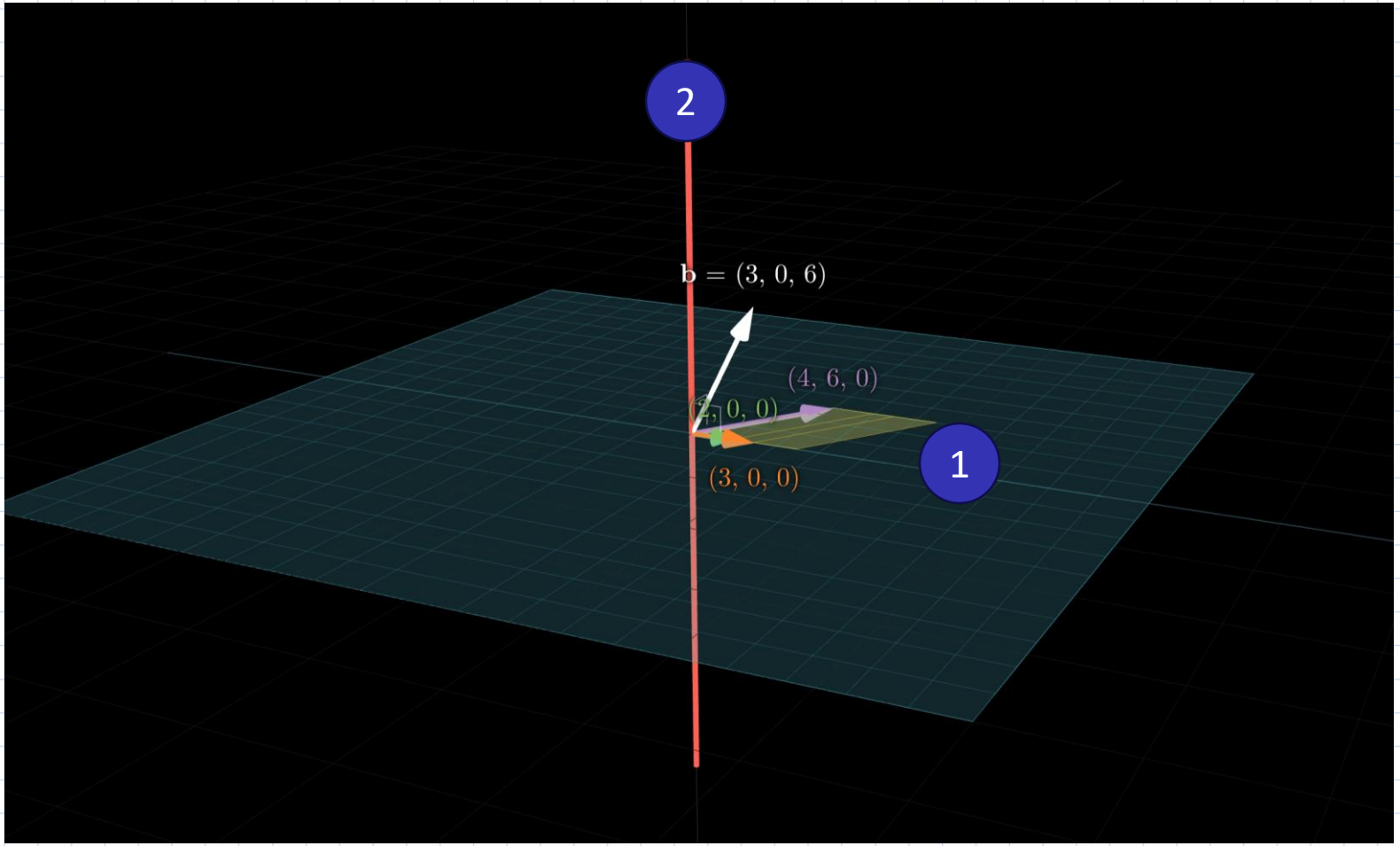


1 ?

2 ?

3 ?

N(A), C(A) oder R(A)?

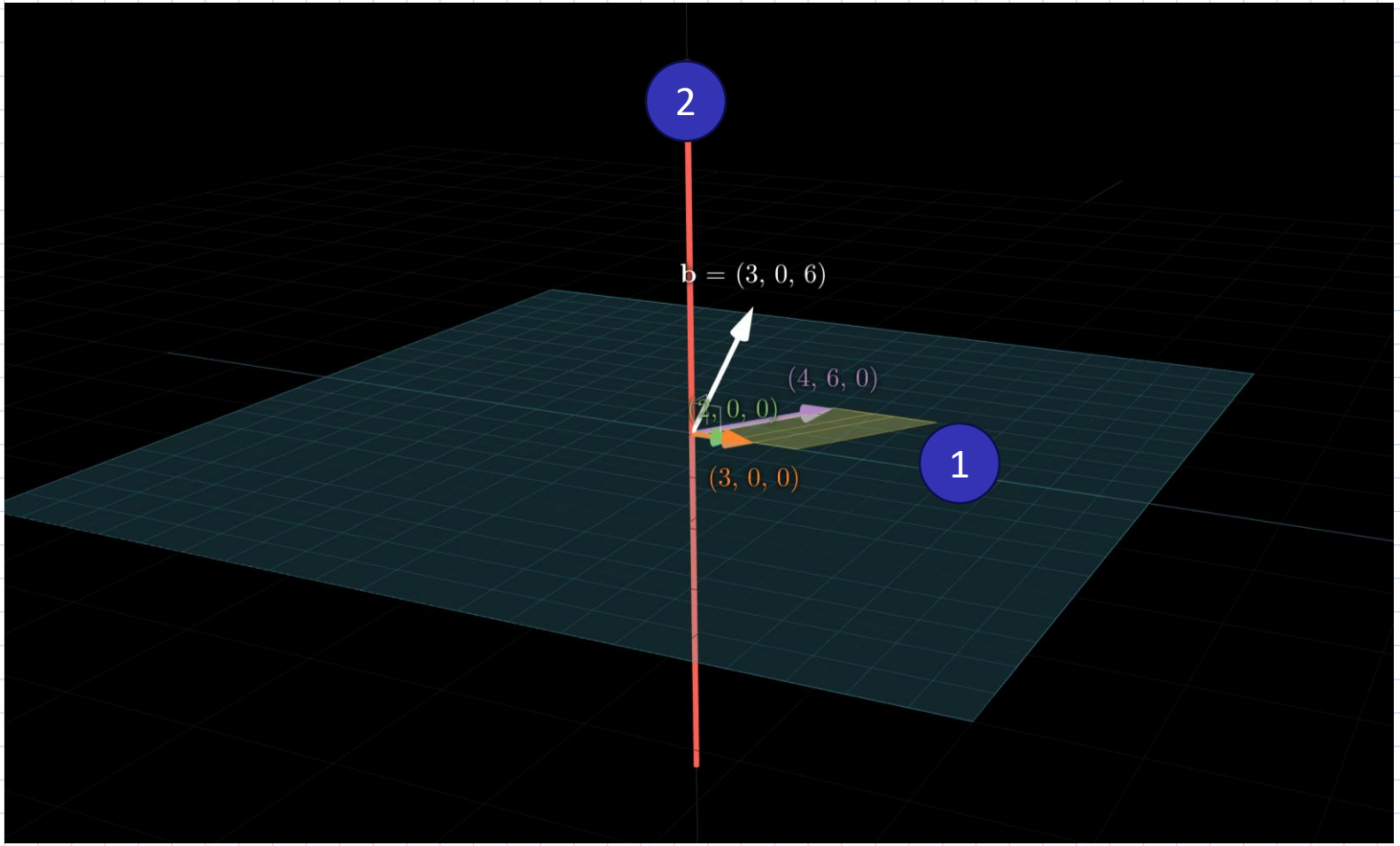


1 C(A)

2 ?

3 ?

N(A), C(A) oder R(A)?

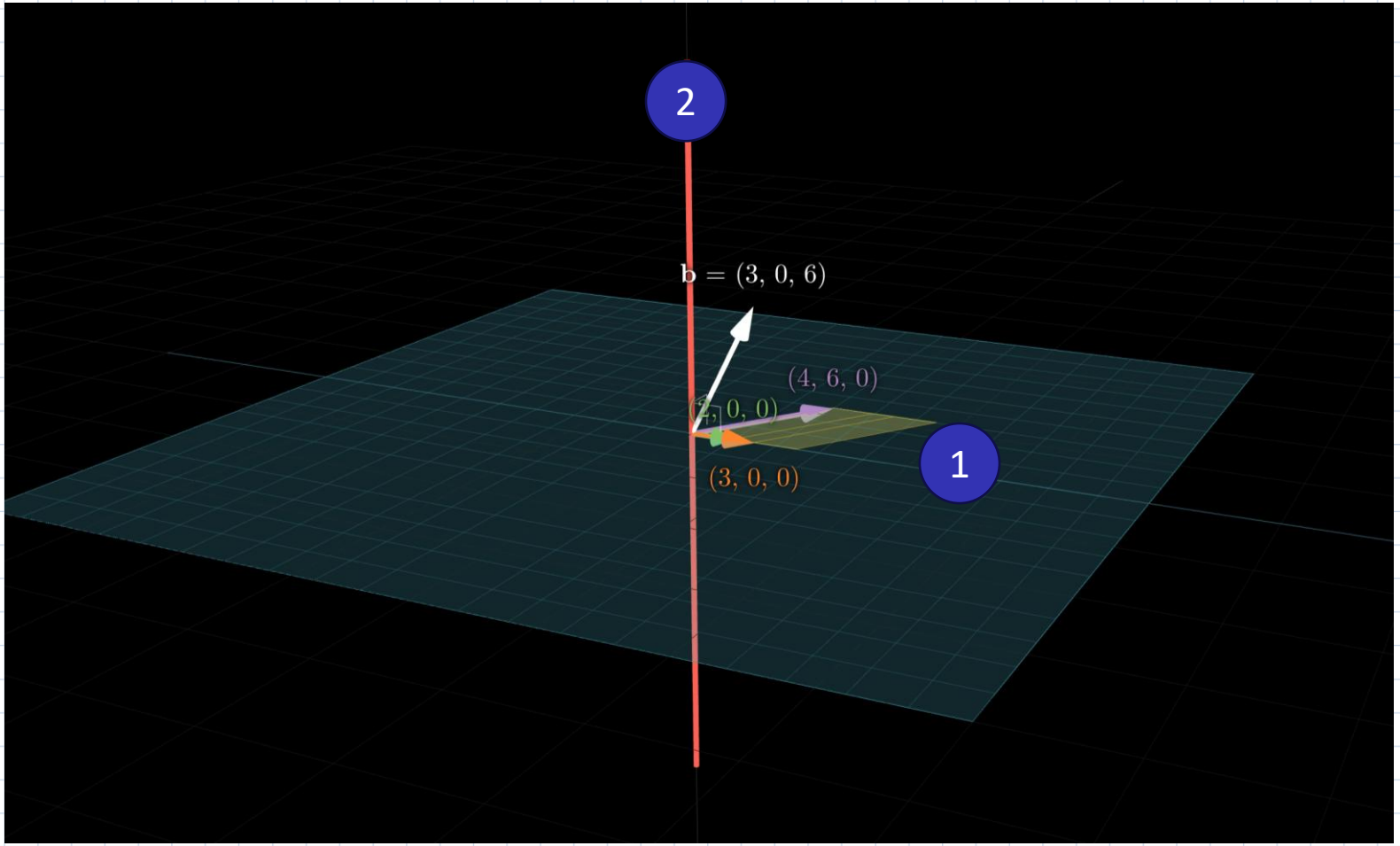


1 C(A)

2 $N(A^T)$

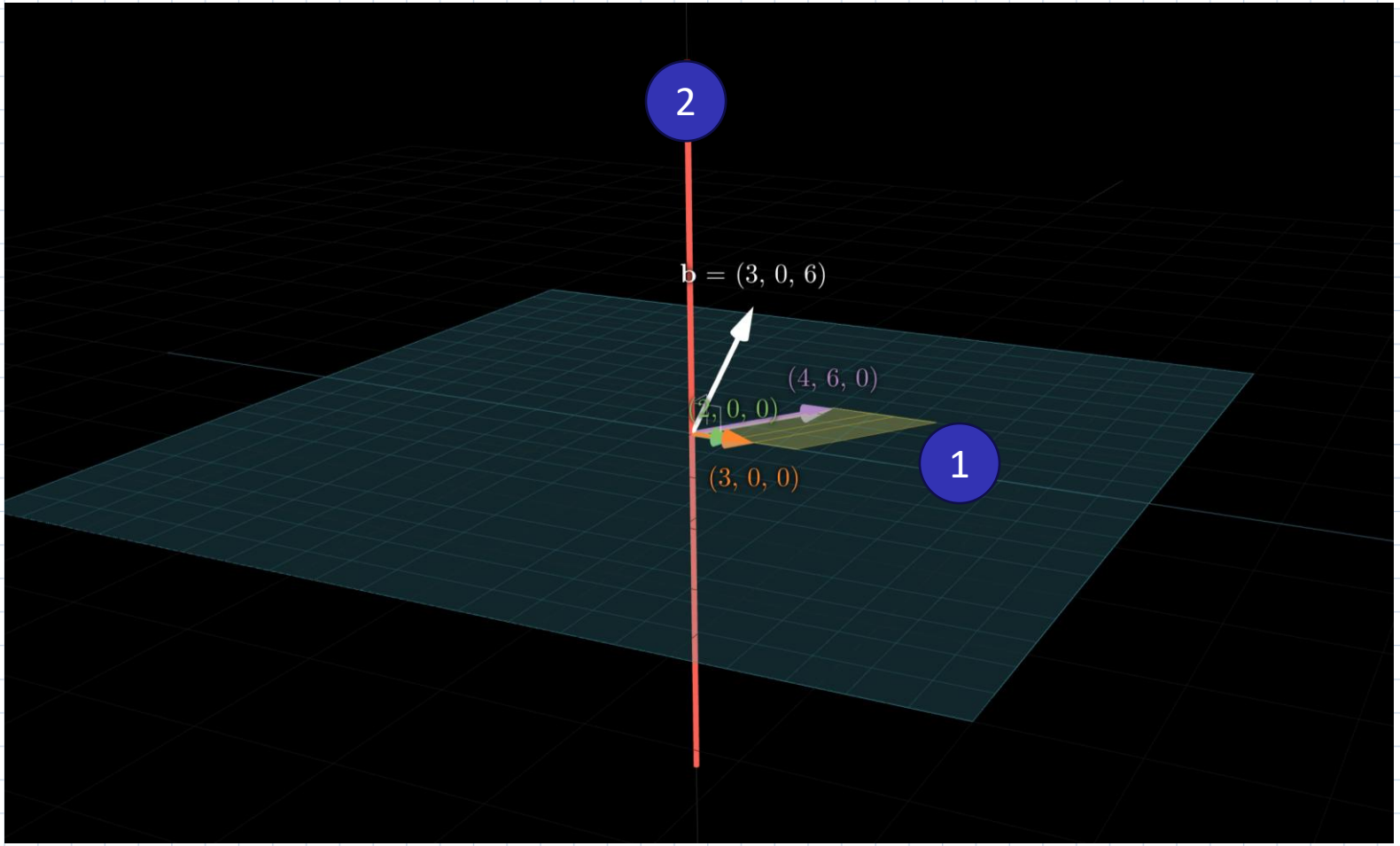
3 ?

N(A), C(A) oder R(A)?



1. C(A)
2. $N(A^T)$
3. $b \in N(A^T)$ oder $b \in C(A)$?

N(A), C(A) oder R(A)?



1. C(A)
2. $N(A^T)$
3. weder noch

Erfolg und Misserfolg

Theorem 3.7: Let $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ be a system of m linear equations in m variables. The following two statements are equivalent.

(i) Gauss elimination as in Algorithm 2 succeeds.

(ii) The columns of A are linearly independent.

Erfolg und Misserfolg

Theorem 3.7: Let $Ax = b$ be a system of m linear equations in m variables. The following two statements are equivalent.

(i) Gauss elimination as in Algorithm 2 succeeds.

(ii) The columns of A are linearly independent.

Wir finden somit immer eine Lösung für b

(i) => x wurde ermittelt

(ii) => C(A) = $\mathbb{R}^m$ (b liegt in C(A))

Wahr oder Falsch? ($A \in \mathbb{R}^{m \times m}, b \in \mathbb{R}^m$)

(a) Ist Gauss-Elimination für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfolgreich, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung.

(b) Ob Gauss-Elimination erfolgreich ist, hängt von $\mathbf{b}$ ab.

(c) Scheitert Gauss-Elimination, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

(d) Hat A eine Nullzeile, so scheitert Gauss-Elimination.

(e) Gauss-Elimination ist für A genau dann erfolgreich, wenn sie für $A^\top$ erfolgreich ist.

Wahr oder Falsch? ($A \in \mathbb{R}^{m \times m}, b \in \mathbb{R}^m$)

(a) Ist Gauss-Elimination für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfolgreich, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung. ✅

(b) Ob Gauss-Elimination erfolgreich ist, hängt von $\mathbf{b}$ ab.

(c) Scheitert Gauss-Elimination, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

(d) Hat A eine Nullzeile, so scheitert Gauss-Elimination.

(e) Gauss-Elimination ist für A genau dann erfolgreich, wenn sie für $A^\top$ erfolgreich ist.

Wahr oder Falsch? ($A \in \mathbb{R}^{m \times m}, b \in \mathbb{R}^m$)

(a) Ist Gauss-Elimination für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfolgreich, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung. ✅

(b) Ob Gauss-Elimination erfolgreich ist, hängt von $\mathbf{b}$ ab. ❌

(c) Scheitert Gauss-Elimination, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

(d) Hat A eine Nullzeile, so scheitert Gauss-Elimination.

(e) Gauss-Elimination ist für A genau dann erfolgreich, wenn sie für $A^\top$ erfolgreich ist.

Wahr oder Falsch? ($A \in \mathbb{R}^{m \times m}, b \in \mathbb{R}^m$)

(a) Ist Gauss-Elimination für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfolgreich, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung. ✅

(b) Ob Gauss-Elimination erfolgreich ist, hängt von $\mathbf{b}$ ab. ❌

(c) Scheitert Gauss-Elimination, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung. ❌

(d) Hat A eine Nullzeile, so scheitert Gauss-Elimination.

(e) Gauss-Elimination ist für A genau dann erfolgreich, wenn sie für $A^\top$ erfolgreich ist.

Wahr oder Falsch? ($A \in \mathbb{R}^{m \times m}, b \in \mathbb{R}^m$)

(a) Ist Gauss-Elimination für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfolgreich, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung. ✅

(b) Ob Gauss-Elimination erfolgreich ist, hängt von $\mathbf{b}$ ab. ❌

(c) Scheitert Gauss-Elimination, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung. ❌

(d) Hat A eine Nullzeile, so scheitert Gauss-Elimination. ✅

(e) Gauss-Elimination ist für A genau dann erfolgreich, wenn sie für $A^\top$ erfolgreich ist.

Wahr oder Falsch? ($A \in \mathbb{R}^{m \times m}, b \in \mathbb{R}^m$)

(a) Ist Gauss-Elimination für $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfolgreich, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung. ✅

(b) Ob Gauss-Elimination erfolgreich ist, hängt von $\mathbf{b}$ ab. ❌

(c) Scheitert Gauss-Elimination, so hat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung. ❌

(d) Hat A eine Nullzeile, so scheitert Gauss-Elimination. ✅

(e) Gauss-Elimination ist für A genau dann erfolgreich, wenn sie für $A^\top$ erfolgreich ist. ✅

Invarianz der Lösungen

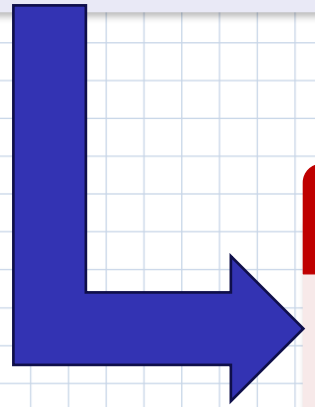
Lemma 3.2

Let A be an m × n matrix, M an invertible m × m matrix, b ∈ $\mathbb{R}^m$.
The two systems Ax = b and M Ax = M b have the same solutions x.

Invarianz der Lösungen

Lemma 3.2

Let A be an m × n matrix, M an invertible m × m matrix, b ∈ $\mathbb{R}^m$.
The two systems Ax = b and M Ax = M b have the same solutions x.



In anderen Worten:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{MAx} = \mathbf{Mb}$$

Invarianz der Lösungen

Lemma 3.2

Let A be an m × n matrix, M an invertible m × m matrix, b ∈ $\mathbb{R}^m$.
The two systems Ax = b and M Ax = M b have the same solutions x.

Proof. For every $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

- $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow MA\mathbf{x} = M\mathbf{b}$;
- $MA\mathbf{x} = M\mathbf{b} \Rightarrow \underbrace{\overbrace{M^{-1}M}^{I} A\mathbf{x}}_{A\mathbf{x}} = \underbrace{\overbrace{M^{-1}M}^{I} \mathbf{b}}_{\mathbf{b}}$.

Wichtig!

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$ gilt nicht immer!

Welche Richtung gilt?

Wann gelten beide Richtungen?

Wichtig!

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$ gilt nicht immer!

Welche Richtung gilt? $\Leftarrow$

Wann gelten beide Richtungen?

Wichtig!

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$$ gilt nicht immer!

Welche Richtung gilt? $\Leftarrow$

Wann gelten beide Richtungen? Wenn A invertierbar ist

Auch sehr wichtig!!!

- Meistert die Gauss Elimination!
- Wird sehr wahrscheinlich die erste Aufgabe bei der Prüfung sein
- Macht ~6% der Prüfung aus

Auch sehr wichtig!!!

- Meistert die Gauss Elimination!
- Wird sehr wahrscheinlich die erste Aufgabe bei der Prüfung sein
- Macht ~6% der Prüfung aus

Zum Üben:

Löse das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Gauss-Elimination und Rückwärtseinsetzen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Auch auf https://linalg-26.vercel.app/exercise.html?type=systems

Auch sehr wichtig!!!

- Meistert die Gauss Elimination!
- Wird sehr wahrscheinlich die erste Aufgabe bei der Prüfung sein
- Macht ~6% der Prüfung aus

Lösung: $x = (1,1,1)^T$

Zum Üben:

Löse das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit Gauss-Elimination und Rückwärtseinsetzen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Auch auf https://linalg-26.vercel.app/exercise.html?type=systems

Invarianz des Rowspace

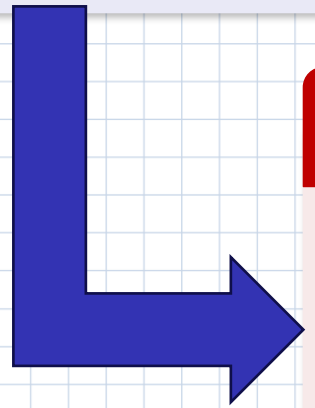
Lemma 3.5

Let A be an m × n matrix and M an invertible m × m matrix. Then A and M A have the same row space, R(A) = R(M A).

Invarianz des Rowspace

Lemma 3.5

Let A be an m × n matrix and M an invertible m × m matrix. Then A and M A have the same row space, R(A) = R(M A).



In anderen Worten:

Zeilenoperationen die man rückgängig machen kann verändern den Zeilenraum nicht. (Da wir dieselben Zeilen dazuaddieren oder vertauschen, ist jede Zeile immernoch eine lineare Kombination der ursprünglichen Zeilen)

Proof of Lemma 3.5

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}$ $\mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$.

(ii) $C(MA) = C(A)$.

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$.

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist.

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$.

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile.

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}$ $\mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$. ✅

(ii) $C(MA) = C(A)$.

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$.

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist.

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$.

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile.

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}$ $\mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$. ✅

(ii) $C(MA) = C(A)$. ❌

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$.

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist.

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$.

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile.

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}$ $\mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$. ✅

(ii) $C(MA) = C(A)$. ❌

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$. ✅

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist.

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$.

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile.

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}\ \mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$. ✅

(ii) $C(MA) = C(A)$. ❌

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$. ✅

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist. ❌

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$.

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile.

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}$ $\mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$. ✅

(ii) $C(MA) = C(A)$. ❌

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$. ✅

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist. ❌

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$. ❌

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile.

Wahr oder Falsch? ($\boldsymbol{A, M \epsilon}\ \mathbb{R}^{m\text{x}m}$ mit $\boldsymbol{M}$ invertierbar)

(i) $R(MA) = R(A)$. ✅

(ii) $C(MA) = C(A)$. ❌

(iii) Ist $C(A) = \mathbb{R}^m$, so ist auch $C(MA) = \mathbb{R}^m$. ✅

(iv) Die Aussage $R(MA) = R(A)$ gilt auch, wenn M nicht invertierbar ist. ❌

(v) Ist $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar (Multiplikation von *rechts*), so ist $R(AN) = R(A)$. ❌

(vi) Ist Zeile i von MA eine Nullzeile, so ist auch Zeile i von A eine Nullzeile. ❌

In-class

1. Interpolation (in-class) (★☆☆) Assume that you have collected the following data points

x	y
0	1
2	2
4	5
6	6

and you want to find a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that interpolates them, i.e. f should satisfy $f(x) = y$ for all pairs of x, y given by the table above. There is an abundance of functions that you can try and in particular, there are many different functions that do interpolate the four datapoints. In this exercise, we are interested in polynomials, i.e. we restrict f to be a polynomial of degree at most 3. In particular, this means that f has the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ for some $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Your task is to find values for a, b, c, d such that f interpolates all four points given in the table.

Lösen mit Gauss-Elimination und Rückwärtseinsetzen

Lineares Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
1d & & & & = 1 \\
1d & + 2c & + 4b & + 8a & = 2 \\
1d & + 4c & + 16b & + 64a & = 5 \\
1d & + 6c & + 36b & + 216a & = 6
\end{aligned}
$$

Lösen mit Gauss-Elimination und Rückwärtseinsetzen

Lineares Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
1d & & & & = 1 \\
1d & + 2c & + 4b & + 8a & = 2 \\
1d & + 4c & + 16b & + 64a & = 5 \\
1d & + 6c & + 36b & + 216a & = 6
\end{aligned}
$$

Matrix-Vektor-Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}
$$

Algorithmus

- Mache die roten Einträge mithilfe von Zeilensubtraktionen und Zeilenvertauschungen zu 0!
- Löse anschliessend mit Rückwärtseinsetzen nach $\mathbf{x}$ auf!

Elimination in Spalte 1: Subtrahiere 1 · Zeile 1 von Zeile 2

Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$

$$
\begin{array}{cc}
A & \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\
E_{21} \cdot \downarrow & E_{21} \cdot \downarrow \\
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zeilenoperation

$$
\begin{array}{rcccc|c}
\text{Zeile 2}: & 1 & 2 & 4 & 8 & 2 \\
-1 \cdot \text{Zeile 1}: & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
= \text{Zeile 2}': & 0 & 2 & 4 & 8 & 1
\end{array}
$$

Eliminationsmatrix

$$
E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Elimination in Spalte 1: Subtrahiere 1 · Zeile 1 von Zeile 3

Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$

$$
\begin{array}{cc}
A & \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ \mathbf{1} & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\
E_{31} \cdot \downarrow & E_{31} \cdot \downarrow \\
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 16 & 64 \\ \mathbf{1} & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zeilenoperation

$$
\begin{array}{rcccc|c}
\text{Zeile 3}: & \mathbf{1} & 4 & 16 & 64 & 5 \\
-1 \cdot \text{Zeile 1}: & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
= \text{Zeile 3}': & 0 & 4 & 16 & 64 & 4
\end{array}
$$

Eliminationsmatrix

$$
E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Elimination in Spalte 1: Subtrahiere 1 · Zeile 1 von Zeile 4

Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$

$$
\begin{array}{cc}
A & \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\
E_{41} \cdot \downarrow & E_{41} \cdot \downarrow \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{4} & 16 & 64 \\ 0 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zeilenoperation

$$
\begin{array}{rcccc|c}
\text{Zeile } 4: & \mathbf{1} & 6 & 36 & 216 & 6 \\
-1 \cdot \text{Zeile } 1: & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
= \text{Zeile } 4': & 0 & 6 & 36 & 216 & 5
\end{array}
$$

Eliminationsmatrix

$$
E_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Elimination in Spalte 2: Subtrahiere 2 · Zeile 2 von Zeile 3

Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$

$$
\begin{array}{cc}
A & \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & \mathbf{4} & 16 & 64 \\ 0 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \\
E_{32} \cdot \downarrow & E_{32} \cdot \downarrow \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 48 \\ 0 & \mathbf{6} & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zeilenoperation

$$
\begin{array}{rcccc|c}
\text{Zeile 3}: & 0 & \mathbf{4} & 16 & 64 & 4 \\
-2 \cdot \text{Zeile 2}: & 0 & 4 & 8 & 16 & 2 \\
\hline
= \text{Zeile 3}': & 0 & 0 & 8 & 48 & 2
\end{array}
$$

Eliminationsmatrix

$$
E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Elimination in Spalte 2: Subtrahiere 3 · Zeile 2 von Zeile 4

Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$

$$
\begin{array}{cc}
A & \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 48 \\ 0 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\
E_{42} \cdot \downarrow & E_{42} \cdot \downarrow \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 48 \\ 0 & 0 & 24 & 192 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zeilenoperation

$$
\begin{array}{rcccc|c}
\text{Zeile } 4: & 0 & 6 & 36 & 216 & 5 \\
-3 \cdot \text{Zeile } 2: & 0 & 6 & 12 & 24 & 3 \\
\hline
= \text{Zeile } 4': & 0 & 0 & 24 & 192 & 2
\end{array}
$$

Eliminationsmatrix

$$
E_{42} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Elimination in Spalte 3: Subtrahiere 3 · Zeile 3 von Zeile 4

Matrix A und rechte Seite $\mathbf{b}$

$$
\begin{array}{cc}
A & \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & \mathbf{8} & 48 \\ 0 & 0 & \mathbf{24} & 192 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
E_{43} \cdot \downarrow & E_{43} \cdot \downarrow \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Zeilenoperation

$$
\begin{array}{rcccc|c}
\text{Zeile } 4: & 0 & 0 & 24 & 192 & 2 \\
-3 \cdot \text{Zeile } 3: & 0 & 0 & 24 & 144 & 6 \\
\hline
= \text{Zeile } 4': & 0 & 0 & 0 & 48 & -4
\end{array}
$$

Eliminationsmatrix

$$
E_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}
$$

Rückwärtseinsetzen zur Berechnung von a, b, c, d

Matrix-Vektor-Form $A\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1d &= 1 \\ 2c + 4b + 8a &= 1 \\ 8b + 48a &= 2 \\ 48a &= -4 \end{aligned}$$

Gl.	vor dem Einsetzen	nach dem Einsetzen	Lösung
1	$1d = 1$	$1d = 1$	$d = 1$
2	$2c + 4b + 8a = 1$	$2c + 7/3 = 1$	$c = -2/3$
3	$8b + 48a = 2$	$8b - 4 = 2$	$b = 3/4$
4	$48a = -4$	$48a = -4$	$a = -1/12$

Was wenn wir mehrere Gleichungssysteme auf einmal lösen wollen?

Algorithmus 2

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$

Idee

- Wir lösen die drei Systeme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_j$ gleichzeitig ($\mathbf{b}_j$ = j-te Spalte von B).
- Jede Zeilenoperation ist eine Multiplikation von links: E (Zeile $i - \lambda \cdot$ Zeile j) oder P (Zeilentausch).
- Sie wird immer auf **beiden Seiten** angewendet: $A \to EA$ und $B \to EB$.
- Pivot $u_{jj} = 0$ → Zeilentausch mit P; ist kein Tausch möglich, endet der Algorithmus mit „failed“.

Schritt 1: aktueller Stand

Linke Seite

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Rechte Seite

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Schritt 1: Zeile 2 − 2 · Zeile 1: E_{21} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

Schritt 2: aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{21}A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{21}B$

Schritt 2: Zeile 3 − 1 · Zeile 1: E_{31} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}}_{E_{21}B}$$

Schritt 3: aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$E_{31}E_{21}A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{31}E_{21}B$

Schritt 3: Zeile 3 − 1 · Zeile 2: E_{32} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}}_{E_{31}E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}E_{21}B}$$

Output: (U, C, „succeeded“)

Ausgabe U

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = E_{32}E_{31}E_{21}A$$

Ausgabe C

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = E_{32}E_{31}E_{21}B$$

Das Wesentliche: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_j \iff U\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$

Kernaussage (hier für $j = 1$; genauso für $j = 2, 3$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_1}$$

Warum gilt das?

- Alle Schritte zusammen: $M = E_{32}E_{31}E_{21}$ (bei Zeilentausch auch P).
- M ist invertierbar, weil jedes E und jedes P invertierbar ist.
- $U = MA$ und $C = MB$, also $\mathbf{c}_j = M\mathbf{b}_j$.

Beweis

- $\Rightarrow$: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_j \Rightarrow MA\mathbf{x} = M\mathbf{b}_j \Rightarrow U\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$
- $\Leftarrow$: $U\mathbf{x} = \mathbf{c}_j \Rightarrow M^{-1}U\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{c}_j \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}_j$
- Gleiche Lösungen — aber $U\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$ löst man einfach durch Rückwärtseinsetzen.

Beispiel 2: $B = I$ (Einheitsmatrix)

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = I$

Idee

- Gleiche Zeilenoperationen wie in Beispiel 1 — nur steht rechts jetzt die Einheitsmatrix I.
- Weil $E \cdot I = E$, sammelt die rechte Seite das Produkt aller Matrizen E auf.
- Wir machen weiter, bis links I steht (Gauss-Jordan) — dann steht rechts A^{-1}.

Schritt 1: aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{2} & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B = I$

Schritt 1: Zeile 2 − 2 · Zeile 1: E_{21} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

E_{21} A

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E_{21} $B = I$

Schritt 2: aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{21}A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{21}B$

Schritt 2: Zeile 3 – 1 · Zeile 1: E_{31} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}B}$$

Schritt 3: aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$E_{31}E_{21}A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{31}E_{21}B$

Schritt 3: Zeile 3 – 1 · Zeile 2: E_{32} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}}_{E_{31}E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}E_{21}B}$$

Output: (U, C, „succeeded“)

Ausgabe U

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = E_{32}E_{31}E_{21}A$$

Ausgabe C

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = E_{32}E_{31}E_{21}B$$

Schritt 4 (bis A = I): aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$E_{32}E_{31}E_{21}A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{32}E_{31}E_{21}B$

Schritt 4 (bis A = I): Zeile 3 · 1/3: D_3 auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}}_{D_3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{E_{32}E_{31}E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}}_{D_3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}E_{31}E_{21}B}$$

Schritt 5 (bis A = I): aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$D_3 E_{32} E_{31} E_{21} A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$D_3 E_{32} E_{31} E_{21} B$

Schritt 5 (bis A = I): Zeile 2 + 1 · Zeile 3: E_{23} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}}_{D_3E_{32}E_{31}E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{D_3E_{32}E_{31}E_{21}B}$$

Schritt 6 (bis A = I): aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}A$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}B$

Schritt 6 (bis A = I): Zeile 1 − 1 · Zeile 3: E_{13} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{13}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{13}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}B}$$

Schritt 7 (bis A = I): aktueller Stand

Linke Seite

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{13}E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}A$$

Rechte Seite

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2/3} & \mathbf{1/3} & \mathbf{-1/3} \\ -5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$E_{13}E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}B$$

Schritt 7 (bis A = I): Zeile 1 − 1 · Zeile 2: E_{12} auf beiden Seiten

Linke Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{13}E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}A}$$

Rechte Seite

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}}_{E_{13}E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}B}$$

Ergebnis: links I, rechts A^{-1}

Linke Seite: I

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{12}E_{13}E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}A = \boldsymbol{I}$$

Rechte Seite: A^{-1}

$$\begin{bmatrix} 7/3 & -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$E_{12}E_{13}E_{23}D_3E_{32}E_{31}E_{21}B = \boldsymbol{A^{-1}}$$

Kahoot?