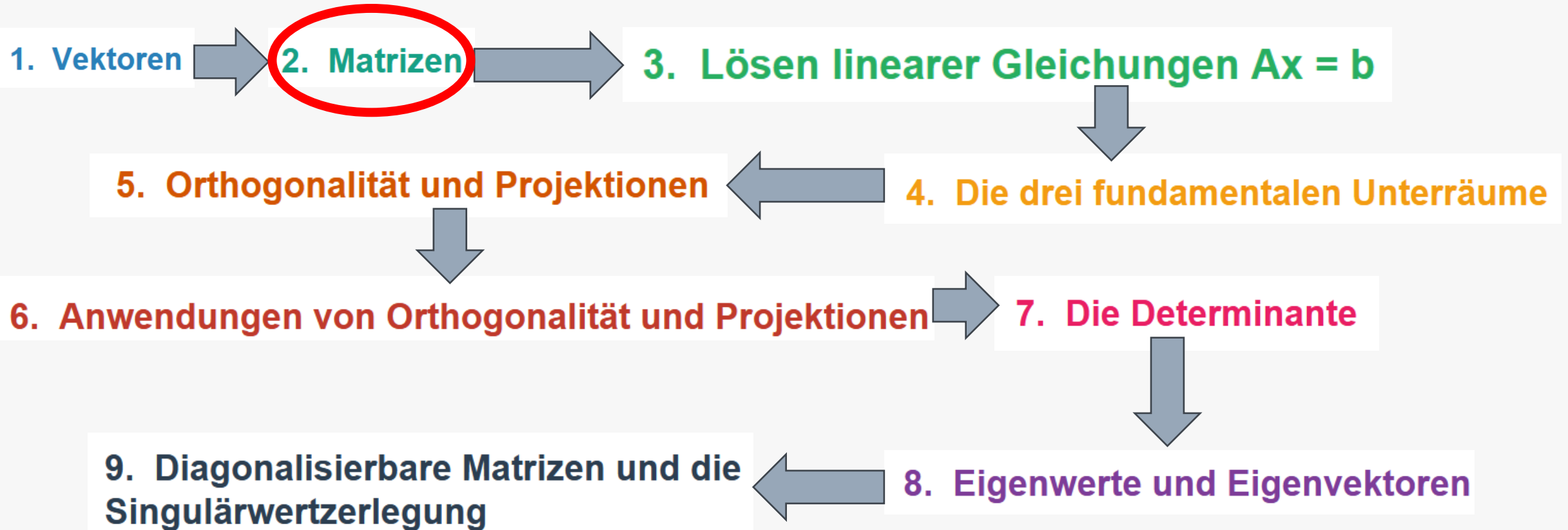


LINEAR ALGEBRA

WEEK 4

Roadmap



Aufgabe

Sei $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Transformation mit

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ mit $T = T_A$ und berechne $T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

FEEDBACK

FRAGEN?

Lemma 2.15

Lemma 2.15 (Rank-1 matrices). *Let A be an $m \times n$ matrix. The following two statements are equivalent.*

- (i) $\text{rank}(A) = 1$.
- (ii) *There are nonzero vectors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ such that $A = [v_i w_j]_{i=1, j=1}^{m, n}$.*

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

(a) $\mathbf{y}^\top A \mathbf{x}$ (b) $\mathbf{x}^\top A$ (c) $A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top$ (d) $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y}$ (e) $A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top$ (f) $\mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

$$(a) \mathbf{y}^\top A \mathbf{x} \quad (b) \mathbf{x}^\top A \quad (c) A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top \quad (d) (\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y} \quad (e) A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top \quad (f) \mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$$

Skalar

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

(a) $\mathbf{y}^\top A \mathbf{x}$ (b) $\mathbf{x}^\top A$ (c) $A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top$ (d) $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y}$ (e) $A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top$ (f) $\mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$

Skalar

nicht definiert

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

(a) $\mathbf{y}^\top A \mathbf{x}$ (b) $\mathbf{x}^\top A$ (c) $A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top$ (d) $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y}$ (e) $A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top$ (f) $\mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$

Skalar nicht definiert 3x2 Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

(a) $\mathbf{y}^\top A \mathbf{x}$ (b) $\mathbf{x}^\top A$ (c) $A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top$ (d) $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y}$ (e) $A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top$ (f) $\mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$

Skalar

nicht definiert

3x2 Matrix

Vektor in $\mathbb{R}^3$

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

(a) $\mathbf{y}^\top A \mathbf{x}$ (b) $\mathbf{x}^\top A$ (c) $A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top$ (d) $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y}$ (e) $A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top$ (f) $\mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$

Skalar

nicht definiert

3x2 Matrix

Vektor in $\mathbb{R}^3$

2x2 Matrix

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

(a) $\mathbf{y}^\top A \mathbf{x}$	(b) $\mathbf{x}^\top A$	(c) $A \mathbf{x} \mathbf{x}^\top$	(d) $(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) \mathbf{y}$	(e) $A^\top \mathbf{y} \mathbf{x}^\top$	(f) $\mathbf{y}^\top A A^\top \mathbf{y}$
------------------------------------	-------------------------	------------------------------------	---	---	---

Skalar

nicht definiert

3x2 Matrix

Vektor in $\mathbb{R}^3$

2x2 Matrix

Skalar

In-class

1. Matrix multiplication with vectors and covectors (in-class) (★☆☆)

Let $n \in \mathbb{N}$. Consider $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ given by $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ and $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Compute $\mathbf{v}^\top \mathbf{w}$ for all $n \in \mathbb{N}$.
- b) Compute $\mathbf{v} \mathbf{w}^\top$ when $n = 4$.
- c) Compute $\mathbf{w}^\top (\mathbf{v} \mathbf{w}^\top) \mathbf{v}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Aufgaben

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{x} \notin N(A)$. Beweise:

(a) $\mathbf{y}^\top A\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top A^\top \mathbf{y}$.

(b) $\mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x} = \|A\mathbf{x}\|^2$. Folgere, dass $\mathbf{x}^\top A^\top A\mathbf{x} > 0$.

Theorem 2.44

Es sei bekannt, dass $A = CR'$ die CR-Zerlegung einer Matrix A ist, wobei

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Berechne A .
- (b) Welche Spalten von A sind unabhängig? Was ist der Rang von A ?
- (c) Schreibe die Spalten 3 und 4 von A als Linearkombination der Spalten von C , ohne zu rechnen.
- (d) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{1000 \times 1000}$ hat Rang r . Wie viele Zahlen muss man speichern, wenn man M direkt speichert, und wie viele, wenn man C und R' speichert?

In-class

2. Exercise 2.45 (in-class) (★☆☆)

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ of rank r and $C \in \mathbb{R}^{m \times r}$ and $R' \in \mathbb{R}^{r \times n}$ be the matrices in the CR-decomposition of A as given in Theorem 2.44.

- a) Suppose $r = n$. What are the matrices C and R' ?
- b) Suppose $r = 0$. What are the matrices C and R' ?

Lemma 2.48/Korollar 2.49

Sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine umkehrbare lineare Transformation mit

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestimme $T^{-1}(\mathbf{e}_1)$ und $T^{-1}(\mathbf{e}_2)$.
- (b) Berechne $T^{-1} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$.
- (c) Bestimme die Matrix B mit $T^{-1} = T_B$ und die Matrix A mit $T = T_A$.

Lemma 2.52

Lemma 2.52: Let A be an $m \times m$ matrix. The following three statements are equivalent.

- (i) $T_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ is reversible.
- (ii) There is an $m \times m$ matrix B such that $BA = I$.
- (iii) The columns of A are linearly independent.

Lemma 2.52

Sei $m \in \mathbb{N}^+$ beliebig und sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

- (a) Es gebe $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ und $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}'$. Beweise, dass es keine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $BA = I$ gibt.
- (b) Folgere: Hat A zwei gleiche Spalten, so ist A singulär.

Lemma 2.58 und Lemma 2.59

Lemma 2.58: Let A and B be invertible $m \times m$ matrices. Then AB is also invertible, and

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proof. Check that $B^{-1}A^{-1}$ satisfies one of the **conditions** for the matrix AB :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

□

Extends to more matrices, for example $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Lemma 2.59: Let A be an invertible $m \times m$ matrix. Then the transpose A^T is also invertible, and

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

KAHOOT