

Lineare Algebra

KW 4 1



Nina Gassner

Willkommen zurück! :D

Zeit für's Quiz! :)
viel Glück!!!



Willkommen zurück! :D

allgemeine Bemerkungen

- Prüfungsanmeldung!
- Diskmath-Abgaben
- VIScon :D



Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zu Abgaben

2. Nullspace as a hyperplane (hand-in) (★★☆)

Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ and $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ not all zero. Consider the $m \times n$ matrix A of the form

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{v} & \lambda_2 \mathbf{v} & \cdots & \lambda_n \mathbf{v} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

a) What is the rank of the matrix A ?

λ_1 kann 0 sein



Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zu Abgaben

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{v} & \lambda_2 \mathbf{v} & \cdots & \lambda_n \mathbf{v} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

b) Prove that the nullspace $\mathbf{N}(A)$ is a hyperplane through the origin.

- key idea: genau dann im Nullraum, wenn zu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T$ orthogonal



Willkommen zurück! :D

$$Ax = 0$$

...

$$x \in H_\lambda$$



Willkommen zurück! :D

$$x \in N(A)$$

$$\Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow x \in H_\lambda$$



Willkommen zurück! :D

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$x \in N(A)$$

$$\Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow x \in H_\lambda$$



Willkommen zurück! :D

$$N(A) \subseteq H_\lambda$$

$$H_\lambda \subseteq N(A)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$x \in N(A)$$

$$\Rightarrow Ax = 0$$

$$\Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow x \in H_\lambda$$



Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zu Abgaben

Formalismus hilft euch, Fehler zu finden!



Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zu Abgaben

b) Prove that the nullspace $\mathbf{N}(A)$ is a hyperplane through the origin.

Definition 1.16 (Hyperplane through the origin). *Let $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. The set*

$$H_{\mathbf{d}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0\}$$

is called a hyperplane through the origin.



Matrix-Matrix-Multiplikation!

wieder: viele Sichtweisen! :D

Bedeutung: Dimensionen



Matrix-Matrix-Multiplikation!

kurze Bemerkung: Randfall

The diagram illustrates the multiplication of two matrices. On the left, a vertical rectangle represents a 3×0 matrix, with a bracket below it labeled 3×0 . To its right is a horizontal bracket representing a 0×4 matrix, with a bracket below it labeled 0×4 . An equals sign follows the second matrix, indicating the result of the multiplication.



Matrix-Matrix-Multiplikation!

kurze Bemerkung: Randfall

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{3 \times 0} \underbrace{[]}_{0 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrix-Matrix-Multiplikation!

Gilt für alle Matrizen A, B :

$$AB = BA?$$



Matrix-Matrix-Multiplikation!

Gilt für alle Matrizen A, B :

$$AB = BA?$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$$



Matrix-Matrix-Multiplikation!

Gilt für alle Matrizen A, B :

$$AB = BA?$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Matrix-Matrix-Multiplikation!

$$(A + B)^2 = ?$$

(A, B sind quadratisch)

- 1.) $A^2 + 2AB + B^2$
- 2.) $A^2 + AB + BA + B^2$
- 3.) $A^2 + 2BA + B^2$
- 4.) $A^2 + AB + B^2$
- 5.) kann undefiniert sein



Matrix-Matrix-Multiplikation!

$$(A + B)^2 = ?$$

(A, B sind quadratisch)

- 1.) $A^2 + 2AB + B^2$
- 2.) $A^2 + AB + BA + B^2$
- 3.) $A^2 + 2BA + B^2$
- 4.) $A^2 + AB + B^2$
- 5.) kann undefiniert sein



Matrix-Matrix-Multiplikation!

Aufgabe:

Zeige, dass für quadratische Matrizen A gilt:

$$(A + I)(A - I) = A^2 - I$$



Matrix-Matrix-Multiplikation!

cool fact :D try to prove it!:

If two matrices A, B satisfy $A + B = I$, then
 A and B commute.

credit: Boris Gachevski ✨ ✨



Linearität!

Definition einer linearen Funktion?



Linearität!

Definition einer linearen Funktion?

Linear transformations and linear functionals:

Definition 2.19: A function $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ / $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *linear transformation* / *linear functional* if the following **linearity axioms** holds for all $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ and all $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $T(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}')$, and

(ii) $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$.



Linearität!

für eine Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

f ist eine Matrix–Transformation
also: $f: x \rightarrow Ax$



f ist linear



Linearität!

für eine Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

f ist eine Matrix–Transformation
also: $f: x \rightarrow Ax$



f ist linear



Linearität!

Aufgabe

Seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, & g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definiere $h := g \circ f$.



Linearität!

Aufgabe

Seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, & g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definiere $h := g \circ f$.

$$h\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



Linearität!

für eine Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

f ist eine Matrix–Transformation
also: $f: x \rightarrow Ax$



f ist linear



Linearität!

Visualisierung von Matrixtransformationen auf linalg.guru!



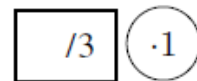
Linearität!

FS25:

a) Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined as

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) := \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

for all $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Prove that f is a linear transformation.



Linearität!

dazu ähnlich ...

Aufgabe

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Zeige, dass f eine lineare Transformation ist.



Linearität!

HS25:

c) [3 Points] Consider the vectors

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Determine a matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ satisfying

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} .$$



Linearität!

dazu ähnlich ...

Aufgabe

Betrachte die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$A(u + v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(u - v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



Linearität!

dazu ähnlich ...

Aufgabe

Betrachte die Vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$A(u + v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(u - v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \end{pmatrix}$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y \end{pmatrix}$$

Ja, mit:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$$

Nein: $f(0) \neq 0$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y$$

Ja, mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$$



Linearität!

Matrixtransformation?

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + y^2$$

Nein!

Was passiert beim “herausziehen” der Spalten?

allgemein: Multiplikation der Einträge miteinander nicht möglich!



Linearität!

HS24, multiple choice :)

3. Let $n \in \mathbb{N}^+$ be arbitrary and fix $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Consider the function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|^2 - \mathbf{x}^\top \mathbf{x}$ for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Which of the following statements must be **true**? *Note: only one answer is correct.*

- (a) f is a linear transformation if and only if $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- (b) f is a linear transformation if and only if $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
- (c) f is a linear transformation if and only if $\|\mathbf{v}\| = 1$.
- (d) It is not possible to choose $\mathbf{v}$ such that f is a linear transformation.



in-class Aufgaben! :)

1. Linear functional (in-class) (★☆☆)

a) Let $n \in \mathbb{N}^+$. Consider the function $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n kx_k$$

for all $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Prove that T is a linear functional.



in-class Aufgaben! :)

b) Let $n \in \mathbb{N}^+$ with $n \geq 2$ be arbitrary. Consider the function $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n (x_k)^k$$

for all $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Is T a linear functional?



Kahoot time! :D



bis nächste Woche!



<https://linalg.guru>

