

Lineare Algebra

KW 4 0



Nina Gassner

Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zum Quiz!

- genau das beantworten, was gefragt ist
 - nicht weniger
 - nicht mehr (Zeit!)



Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zum Quiz!

- genau das beantworten, was gefragt ist
 - nicht weniger
 - nicht mehr (Zeit!)

weiter so! :D



Willkommen zurück! :D

kurzer Kommentar zu Abgaben

- Aufgabe: orthogonal $\Rightarrow$ linear unabhängig
 - "neue Richtung"



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Definition einer Linie:

für einen Vektor w : alle Vielfachen von w ($w \neq 0$)



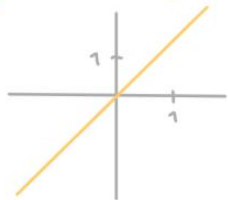
in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Definition einer Linie:

für einen Vektor w : alle Vielfachen von w ($w \neq 0$)

Beispiel: Diese Linie:



wäre z.B. "alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ "

$$\rightarrow \{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

oder auch "alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ "

$$\rightarrow \{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

→ nicht eindeutige
Schreibweise!



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe a:

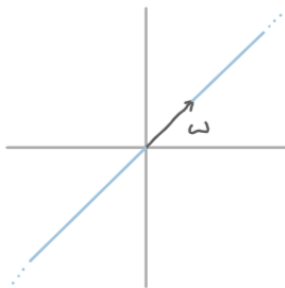
- a) Let $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ denote the vector whose entries are all zero. We say that a set L is a line through the origin in $\mathbb{R}^m$ if and only if there exists $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ with $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ such that $L = \{\lambda \mathbf{w} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Let now L be a line through the origin in $\mathbb{R}^m$ and let $\mathbf{u}$ be an arbitrary non-zero element of L . Prove that $L = \{\lambda \mathbf{u} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.



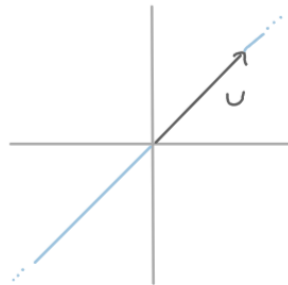
in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe a:



L = alle Vielfachen von w



Wenn wir ein Vielfaches u von w
nehmen (nicht 0, e.g. $u=2w$), gilt:

"Vielfachen von w " = "Vielfachen von u "

"Linie definiert mit Richtung w " = "Linie definiert mit Richtung u "



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe a:

Lemma 3.2. $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$

zwei Ordner A und B sind gleich

⇔ A und B haben den gleichen Inhalt

⇔ Alles aus A ist in B. Alles aus B ist in A. (formal: Sie sind **Teilmengen** voneinander)



in-class letzter Woche – recap!

$$\forall L \quad \forall v \in (L \setminus \{0\})$$

$$L = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

(L)



in-class letzter Woche – recap!

$$\forall L \quad \forall v \in (L \setminus \{0\})$$

$$L \subseteq L'$$

und

$$L' \subseteq L$$



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe a:

Musterlösung:

- a) By definition of L , there exists $w \in \mathbb{R}^m$ such that $L = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$. In particular, we can write $u = \lambda_u w$ for some $\lambda_u \in \mathbb{R}$. Observe that we have $\lambda_u \neq 0$ because $u \neq 0$. Now consider an arbitrary vector $v \in L$. There must be $\lambda_v \in \mathbb{R}$ such that $v = \lambda_v w$. Putting these together, we get $v = \frac{\lambda_v}{\lambda_u} u$. This already proves $L \subseteq \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ and it remains to prove $\{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq L$. For this, consider an arbitrary vector $v' = \lambda_{v'} u \in \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Combining $v' = \lambda_{v'} u$ with $u = \lambda_u w$ we get $v' = \lambda_{v'} \lambda_u w$ and hence $v' \in L$. We conclude that $L = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$.



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe b:

- b) For two lines through the origin L_1 and L_2 in $\mathbb{R}^m$, prove that we have either $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ or $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe b:

- b) For two lines through the origin L_1 and L_2 in $\mathbb{R}^m$, prove that we have either $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ or $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$. $\mathcal{B}$

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

= alles, was in beiden Mengen ist!



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe b:

- b) For two lines through the origin L_1 and L_2 in $\mathbb{R}^m$, prove that we have either $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ or $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$. $\mathcal{B}$

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

= alles, was in beiden Mengen ist!

$L_1 \cap L_2 =$ Schnittmenge der beiden Linien
(Wo schneiden sie sich?)



in-class letzter Woche – recap!

Was haben wir gelernt/gezeigt?

Aufgabe b:

- b) For two lines through the origin L_1 and L_2 in $\mathbb{R}^m$, prove that we have either $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ or $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$. A

umformuliert müssen wir Folgendes beweisen:

Für zwei Linien gilt:

entweder: sie schneiden sich nur im Ursprung

oder: sie sind gleich



in-class letzter Woche – 1c)

Aufgabe c:

- c) Consider an arbitrary line through the origin L in $\mathbb{R}^2$. Prove that L is a hyperplane, i.e. find a vector $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ such that

$$L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0\}.$$



in-class letzter Woche – 1c)

Aufgabe c:

nachlesen:

- meine Notizen auf linalg.guru
- Musterlösung:

c) By definition, there must be a vector $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ such that $L = \{\lambda \mathbf{w} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. We want to find a vector $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ such that $L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0\}$. In particular, we want $\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = w_1 d_1 + w_2 d_2 \stackrel{!}{=} 0$ since $\mathbf{w} \in L$. Choosing $d_1 := -w_2$ and $d_2 := w_1$ would certainly work, so let this be our “guess” for $\mathbf{d}$. It remains to prove that with this choice of $\mathbf{d}$, we have $L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0\}$.

⊆: Consider an arbitrary element $\mathbf{u} = \lambda_u \mathbf{w} \in L$. We have

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{d} = (\lambda_u \mathbf{w}) \cdot \mathbf{d} = \lambda_u w_1 d_1 + \lambda_u w_2 d_2 = \lambda_u (w_1 d_1 + w_2 d_2) = 0$$

and hence $\mathbf{u} \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0\}$.

⊇: Consider an arbitrary element $\mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0\}$. In particular, we have $v_1 d_1 + v_2 d_2 = -v_1 w_2 + v_2 w_1 = 0$. Our goal is to find λ such that $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$. Recall from the definition of a line through the origin that we must have $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ and hence either $w_1 \neq 0$ or $w_2 \neq 0$. Assume first $w_1 \neq 0$ and observe that we can rewrite $-v_1 w_2 + v_2 w_1 = 0$ to $v_2 = \frac{w_2}{w_1} v_1$. Choosing $\lambda = \frac{v_1}{w_1}$ we can see that indeed, we have $v_1 = \lambda w_1$ and $v_2 = \lambda w_2$, as desired. If we have $w_1 = 0$, then it must be the case that $w_2 \neq 0$. But then we can rewrite $-v_1 w_2 + v_2 w_1 = 0$ to $v_1 = \frac{w_1}{w_2} v_2$ and choose $\lambda = \frac{v_2}{w_2}$.

Matrix-Vektor-Multiplikation!

viele Sichtweisen! :D

-> Visualisierung auf linalg.guru



Matrix-Vektor-Multiplikation!

viele Sichtweisen! :D

-> Visualisierung auf linalg.guru

Identitätsmatrix



Matrix-Vektor-Multiplikation!

HS24

c) Let $n \in \mathbb{N}^+$. Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

for all $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Write down the unique matrix A that satisfies $Ax = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^2$.

/1

·6



Matrix-Vektor-Multiplikation!

dazu ähnlich ...

Aufgabe

finde eine Matrix A , sodass gilt:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$



Matrix-Vektor-Multiplikation!

dazu ähnlich ...

Aufgabe

finde eine Matrix A , sodass gilt:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$



Matrix-Vektor-Multiplikation!

$$\mathbf{C}(A) := \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$



Matrix-Vektor-Multiplikation!

Aufgabe

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Finde $x \in \mathbb{R}^3$, sodass gilt:

$Ax =$ zweite Spalte von A

«Extrahierung von Spalten» !



Matrix-Vektor-Multiplikation!

Aufgabe

$$A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Finde $x \in \mathbb{R}^3$, sodass gilt:

$Ax =$ zweite Spalte von A

«Extrahierung von Spalten» !

Was ist mit Extrahierung von Elementen? :D

→ möglicher sehr cooler (aber unnötig komplizierter) Lösungsweg für 6b :)

Let $A = [a_{ij}]_{i=1,j=1}^m$ be skew-symmetric. Show that $a_{ii} = 0$ for all $i \in [m]$.



Matrix-Vektor-Multiplikation!

Matrizen konstruieren!

Rotation um 90° im Uhrzeigersinn in $\mathbb{R}^2$?



Matrix-Vektor-Multiplikation!

Matrizen konstruieren!

Rotation um 90° im Uhrzeigersinn in $\mathbb{R}^2$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man muss nur wissen, wohin die Einheitsvektoren wandern! :)
(bzw. wissen, was die Spalten sind)



Matrix-Vektor-Multiplikation!

$$2x_1 + 4x_2 = y_1$$

$$3x_1 + 6x_2 = y_2$$

(credit: Jonas)

- als Matrix-Vektor-Multiplikation umschreiben?



Matrix-Vektor-Multiplikation!

$$2x_1 + 4x_2 = y_1$$

$$3x_1 + 6x_2 = y_2$$

(credit: Jonas)

- als Matrix-Vektor-Multiplikation umschreiben?
- Wann gibt es eine Lösung?



Matrix-Vektor-Multiplikation!

$$2x_1 + 4x_2 = y_1$$

$$3x_1 + 6x_2 = y_2$$

(credit: Jonas)

- als Matrix-Vektor-Multiplikation umschreiben?
- Gibt es immer eine Lösung?



Lineare Unabhängigkeit

Überblick auf linalg.guru! :D



Lineare Unabhängigkeit

Lösungsidee:

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$.
Bestimme x mit $Ax = 2v_1 - v_2 + 3v_3$.

Begründe, weshalb diese Lösung eindeutig ist.



Lineare Unabhängigkeit

Steinitz :)

(linalg.guru)



in-class Aufgaben! :)

1. Rank of a matrix (in-class) (★★☆)

Let $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ be arbitrary and consider the $m \times m$ matrix

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

with $a_{ij} = i + j$ for all $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

a) Calculate A_m for $m \in \{2, 3, 4\}$.



in-class Aufgaben! :)

b) Determine the rank of A_m . You need to motivate your answer.



Kahoot time! :D



bis nächste Woche!



<https://linalg.guru>

