

Assignment 2: in-class

1. Rank of a matrix (in-class) (★★☆)

Let $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ be arbitrary and consider the $m \times m$ matrix

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

with $a_{ij} = i + j$ for all $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

a) Calculate A_m for $m \in \{2, 3, 4\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ and } A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Determine the rank of A_m . You need to motivate your answer.

Sei $A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ mit $m \geq 2$.

Zunächst fällt uns auf, dass $\text{Rank}(A_m) \geq 2$, da v_1 & v_2 unabhängig sind.

↳ v_1 ist unabhängig, da $v_1 \neq 0$.

v_2 ist unabhängig, da $v_2 = \lambda v_1$ für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

Per Widerspruch:

$$v_2 = \lambda v_1 \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3 = 2\lambda \text{ und } 4 = 3\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \lambda \text{ und } \frac{4}{3} = \lambda$$

$\Rightarrow$ Widerspruch

Weiter gilt mit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$:

$$(i) \quad v_i = v_1 + (i-1) \cdot u \quad \text{für alle } i \in \{3, 4, \dots, m\}$$

$$(ii) \quad u = v_2 - v_1$$

$$(i) \wedge (ii) \Rightarrow \begin{aligned} v_i &= v_1 + (i-1) \cdot (v_2 - v_1) \\ &= (2-i)v_1 + (i-1)v_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v_i &= v_1 + (i-1) \cdot (v_2 - v_1) \\ &= (2-i)v_1 + (i-1)v_2 \end{aligned}} \right\} \text{ für alle } i \in \{3, 4, \dots, m\}$$

$\Rightarrow v_i$ ist Linearkombination von v_1 und v_2 für alle $i \in \{3, 4, \dots, m\}$

$$\Rightarrow \text{Rank}(A_m) \leq 2$$

Da $\text{Rank}(A_m) \leq 2$ UND $\text{Rank}(A_m) \geq 2$ gilt,

folgt: $\text{Rank}(A_m) = 2$

