

Assignment 1: in-class, Aufgabe 1c)

- c) Consider an arbitrary line through the origin L in $\mathbb{R}^2$. Prove that L is a hyperplane, i.e. find a vector $d \neq 0$ such that

$$L = \{v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0\}.$$

- **Intuition: Was wollen wir beweisen?**
 "eine Linie ist die Menge aller Vektoren, die zu einem bestimmten Vektor orthogonal sind"
 "eine Linie ist vollständig durch eine zu ihr orthogonale nicht-null Richtung definiert"

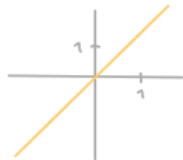
- **geometrische Idee:**
 Gegeben eine Linie L , was für einen Vektor v können wir wählen, damit gilt:
 $L =$ alle Vektoren, die zu v orthogonal sind
 ?

Für die Linie L gilt:

$$L = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{für ein } v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

= alle skalaren Vielfachen von einem Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Beispiel: Diese Linie:



wäre z.B. "alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ " $\rightarrow \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$
 oder auch "alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ " $\rightarrow \{\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\rightarrow$ nicht eindeutige Schreibweise?

Sei also $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $L = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Wir suchen nun einen Vektor v , damit wir sagen

können: $L =$ "alles, was orthogonal zu v ist?"

Geometrisch kommt man auf die Idee:

L ist doch orthogonal zu "v um 90° im Uhrzeigersinn gedreht"?

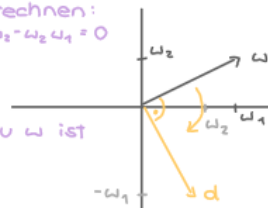
$$d := \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$$

Man kann nachrechnen:
 $v \cdot d = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 v_2 - v_2 v_1 = 0$

$\rightarrow$ Es ist also plausibel, dass gilt:

$$L \stackrel{!}{=} \{v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0\} = \text{alles, was orthogonal zu } d \text{ ist}$$

Diese Gleichheit müssen wir zeigen!



► formaler Beweis

Sei L eine beliebige Linie und $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, sodass gilt:

$$L = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (\text{ein solches } v \text{ existiert per Def. von Linien})$$

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Sei $d := \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $D := \{v \in \mathbb{R}^2 : v \cdot d = 0\}$

Wir werden zeigen, dass gilt:

$$L = D$$

↓
zu d orthogonale Vektoren

Gleichheit zweier Mengen zeigt man durch gegenseitige Inklusion:

Richtung 1: Wir zeigen, dass $L \subseteq D$ gilt. "alles in L ist in D "

Sei $x \in L$ beliebig. | per Def. von L

$$\Rightarrow x = \lambda v$$

$$\Rightarrow x \cdot d = (\lambda v) \cdot d = \lambda \cdot (v \cdot d) = \lambda \cdot 0 = 0 \quad | \text{ per Def. von } D$$

$$\Rightarrow x \in D$$

↳ D beinhaltet alles, was zu d orthogonal ist.

Somit ist gezeigt, dass $L \subseteq D$ gilt! ☺

Richtung 2: Wir zeigen, dass $D \subseteq L$ gilt. "alles in D ist in L "

Sei $x \in D$ beliebig. | per Def. von D

$$\Rightarrow x \cdot d = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 v_2 - x_2 v_1 = 0 \quad | +x_2 v_1, : v_2 \quad \leftarrow \text{Der Schritt geht nur, falls } v_2 \neq 0? \text{ Was, wenn } v_2 = 0?$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x_2 v_1}{v_2}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{x_2 v_1}{v_2} \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{v_2} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x$ ist Vielfaches von v !

$$x \in L$$

Dann könnte man fortsetzen mit...

$$x_1 v_2 - x_2 v_1 = 0 \quad | +x_2 v_1, : v_1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 v_2}{v_1} = x_2$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{x_1 v_2}{v_1} \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_2}{v_1} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x$ ist Vielfaches von v !

$$x \in L$$

falls $v_2 = 0$, muss $v_1 \neq 0$ gelten, weil $v \neq 0$?
Deshalb ist der Schritt legal! ☺ $\frac{v_1}{v_1}$

Somit ist gezeigt, dass $D \subseteq L$ gilt! ☺ yay!

Wir haben $D \subseteq L$ und $L \subseteq D$ gezeigt.

Daher muss $D = L$ gelten! ☺