

1.1 Skalarprodukt

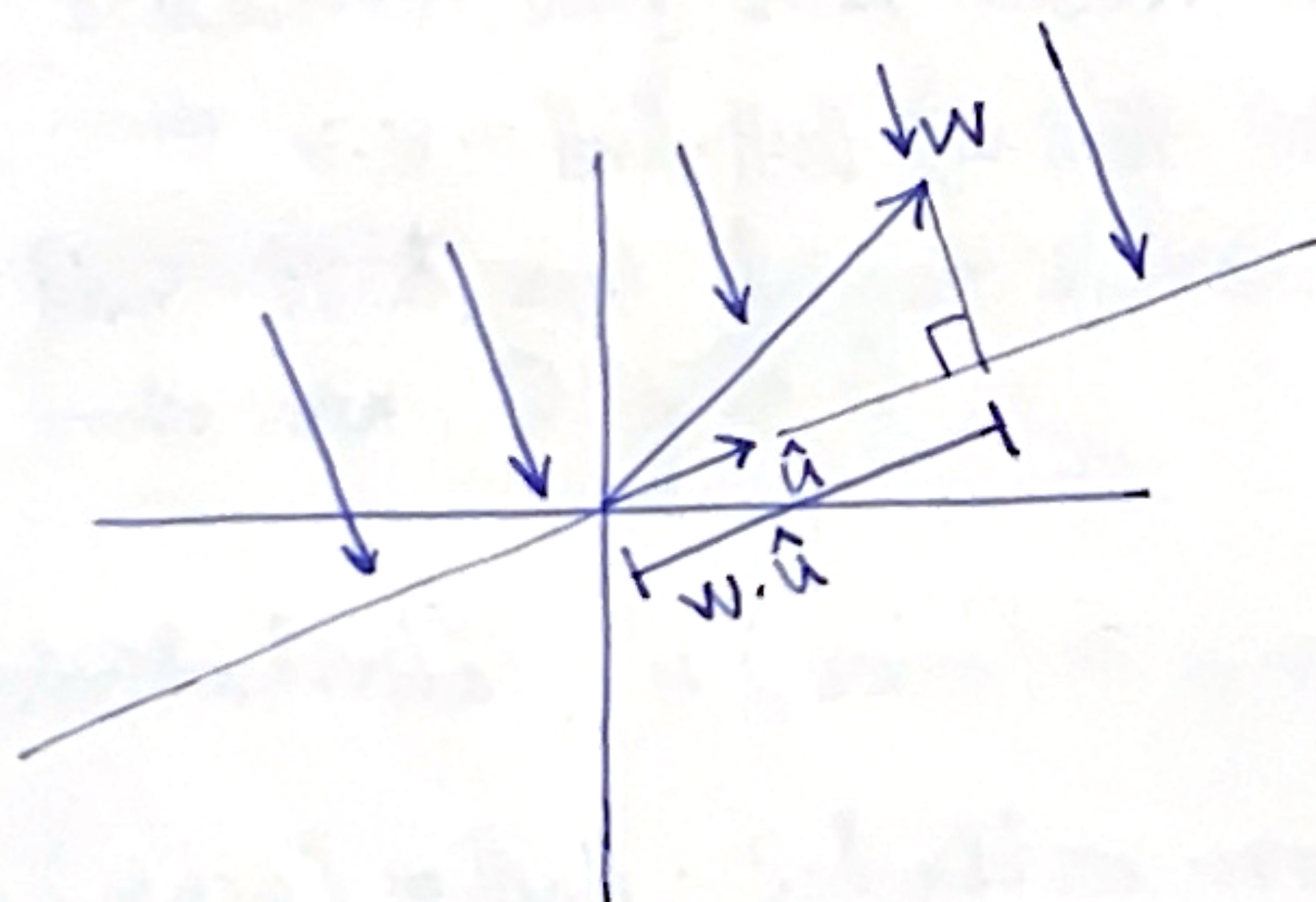
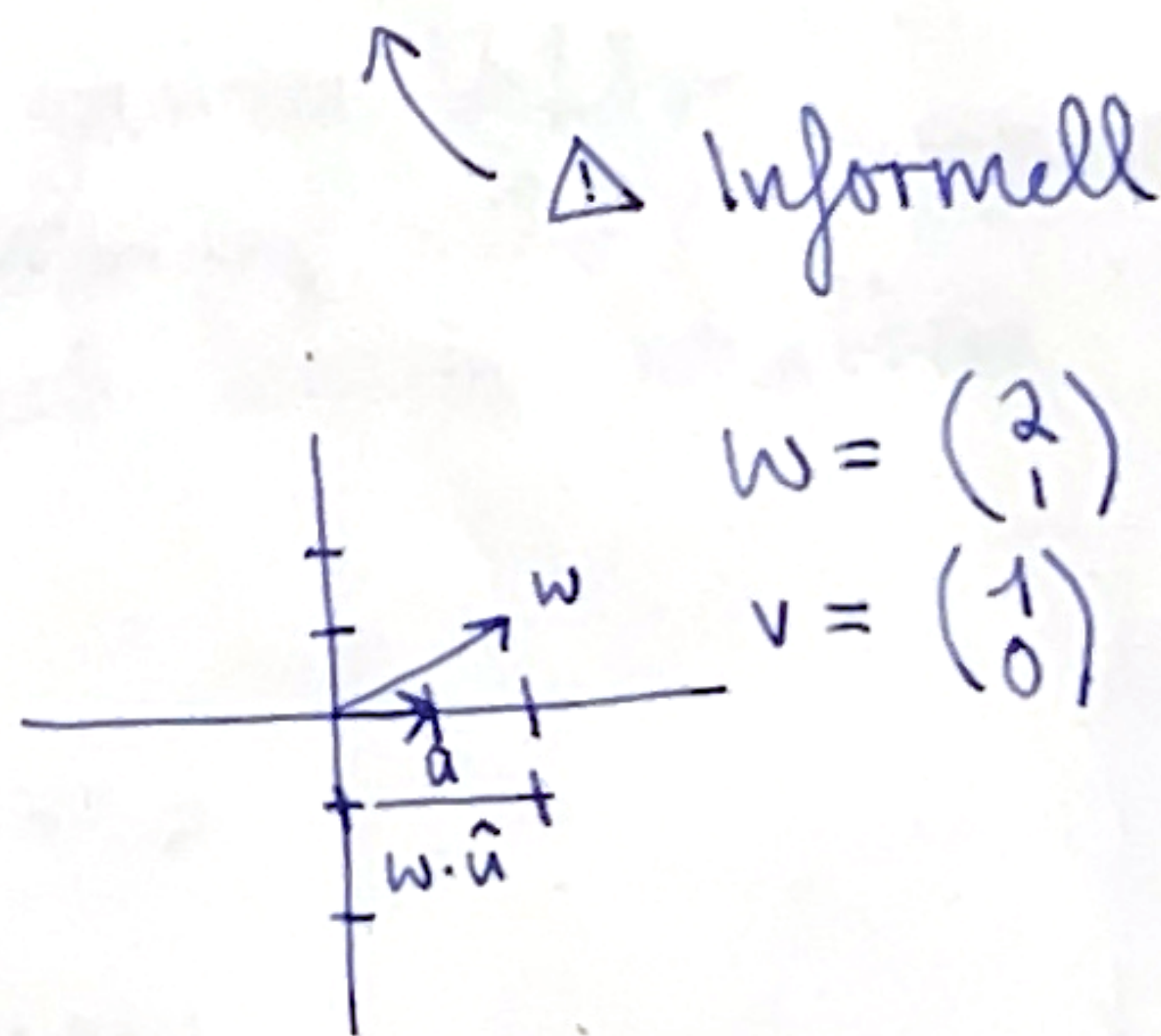
- Def.: $v \cdot w = v^T w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$
 $= \sum_{i=1}^n v_i w_i$

- Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

- Was ist die geometrische Bedeutung?

$\hat{u}$: Einheitsvektor (Länge 1 / $\|\hat{u}\|=1$)

$\hat{u} \cdot w$ ~~$\hat{u} \cdot w$~~ = Länge des Schattens von w auf die Gerade durch $\hat{u}$ (mit Vorzeichen)



Wann ist es 0: $\alpha = 90^\circ$ / $\hat{u}, w$ orthogonal
Was passiert für u mit $\|u\| \neq 1$?

- Observationen

1. $(\lambda v) \cdot w = \lambda (v \cdot w)$

Aus Def.: $(\lambda v) \cdot w = \sum_i (\lambda v_i) w_i$

$$= \lambda \sum_i v_i w_i$$

$$= \lambda (v \cdot w)$$

$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$ hat Länge 1 $\neq 1$

~~Ziel~~ $u = \|u\| \cdot \hat{u}$ ← Länge 1

$$u \cdot w = (\|u\| \cdot \hat{u}) \cdot w = \|u\| \cdot (\hat{u} \cdot w)$$

$= \|u\| \cdot \text{Länge des Schattens von } w$

2. $v \cdot v \geq 0$, mit Gleichheit nur für $v = 0$

- Schatten auf sich selbst ist ganzer Vektor

$$\Rightarrow v \cdot v = \|v\| \cdot \|v\| (= \|v\| \cdot \text{Schatten auf selbst})$$

- Nur Stab mit keiner Länge hat keinen Schatten

$$\Rightarrow \text{nur } 0 \text{ gibt } 0$$

3. Distributivität, $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$

$$u \cdot (v+w) = \|u\| \cdot \text{Schatten von } v+w$$

$$= \|u\| \cdot (\text{Schatten von } v + \text{Schatten von } w)$$

$$= \|u\| \cdot \text{Schatten von } v$$

$$+ \|u\| \cdot \text{Schatten von } w$$

$$= u \cdot v + u \cdot w$$

$$\neq 1 \quad \|\hat{u}\| = \sqrt{\hat{u} \cdot \hat{u}}$$

zu zeigen: $= 1$

$$\hat{u} \cdot \hat{u} = \frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{u}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|^2} = 1 \quad (\text{via Observation 1})$$

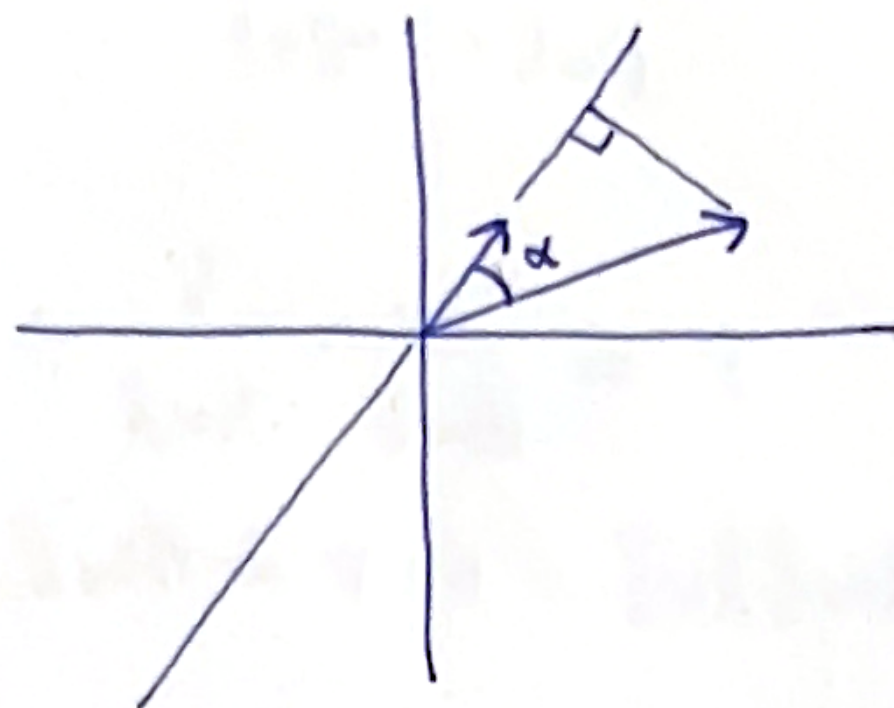
△ informell

4. Symmetrie, $v \cdot w = w \cdot v$

Warum gilt $\|v\| \cdot \text{Schatten von } w$
 $= \|w\| \cdot \text{Schatten von } v$?

$$\begin{aligned} \text{Schatten von } w &= \|w\| \cdot \cos \alpha \\ \text{Schatten von } v &= \|v\| \cdot \cos \alpha \end{aligned} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

FÜR ALLE DIMENSIONEN
PER DEFINITION



Algebraisch: $v_i w_i = w_i v_i$

1.2 Ungleichheiten

- Cauchy Schwarz: $|v \cdot w| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

- Annahme: $\|v\| = \|w\| = 1$

$$0 \leq (v-w)(v-w) = \cancel{v \cdot v}^2 v \cdot v + w \cdot w - 2 \cdot v \cdot w \stackrel{= 2 - 2 \cdot v \cdot w}{\Rightarrow} v \cdot w \leq 1$$

$$0 \leq (v+w)(v+w) = \underbrace{v \cdot v}_{\|v\|=1} + \underbrace{w \cdot w}_{\|w\|=1} + 2 \cdot v \cdot w \stackrel{= 2 + 2 \cdot v \cdot w}{\Rightarrow} v \cdot w \geq -1$$

- Generell:

(benötigt
 $\|v\|, \|w\| \neq 0$,
sonst simpel)

$$-1 \leq \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{w}{\|w\|} \leq 1 \quad | \cdot \|v\| \|w\|$$

$$\|v\| \|w\| \leq v \cdot w \leq \|v\| \|w\| \Rightarrow |v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$$

- Dreiecksungleichung: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

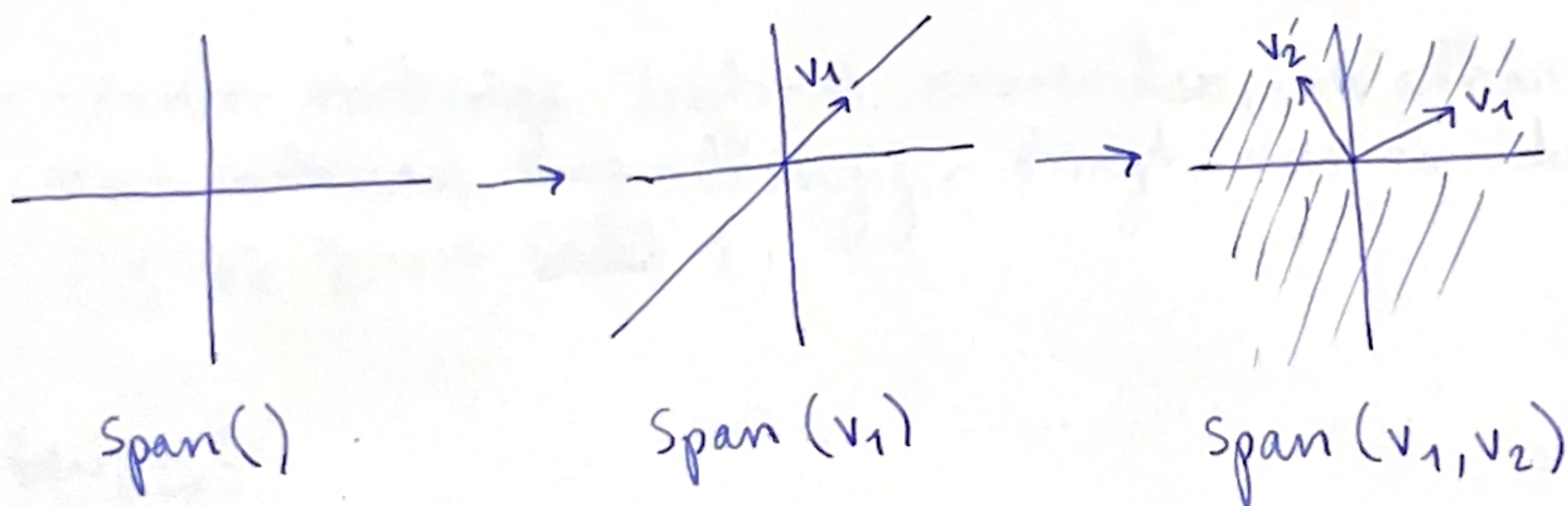
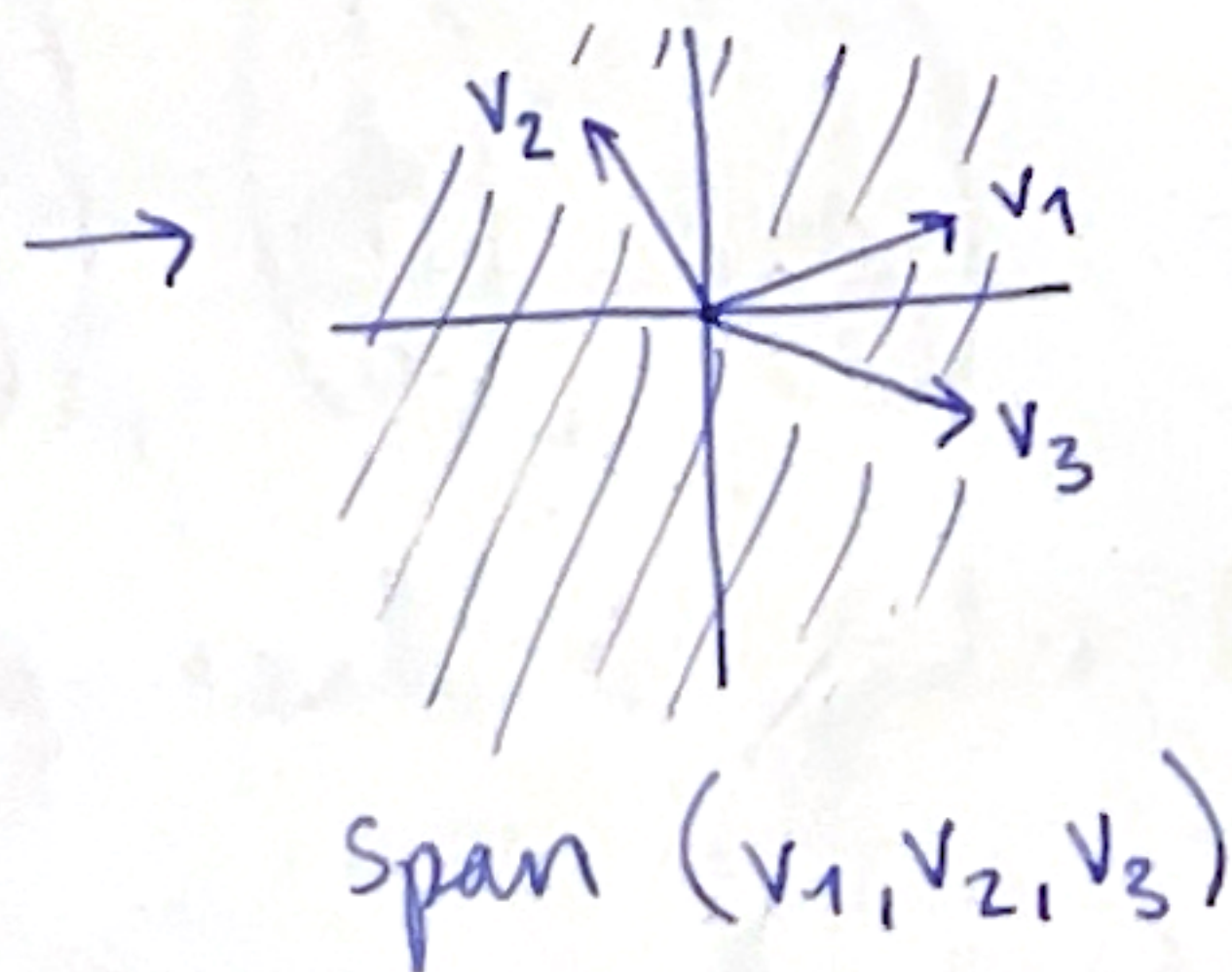
Pythagoras in $\mathbb{R}^2$

Lineare (Un)abhängigkeit (1.3)

- Spann: $\text{span} \{v_1, \dots, v_n\} = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$
"Alle Linearkombinationen mit den Koeffizienten in den reellen Zahlen"
"Alle Vektoren, die wir mit $v_1, \dots, v_n$ & skalieren erreichen können"

- Sicht 1: unabhängig $\iff$ kein Vektor Linearkombi der vorherigen
 $\iff$ jeder neuer Vektor vergrößert Spann

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

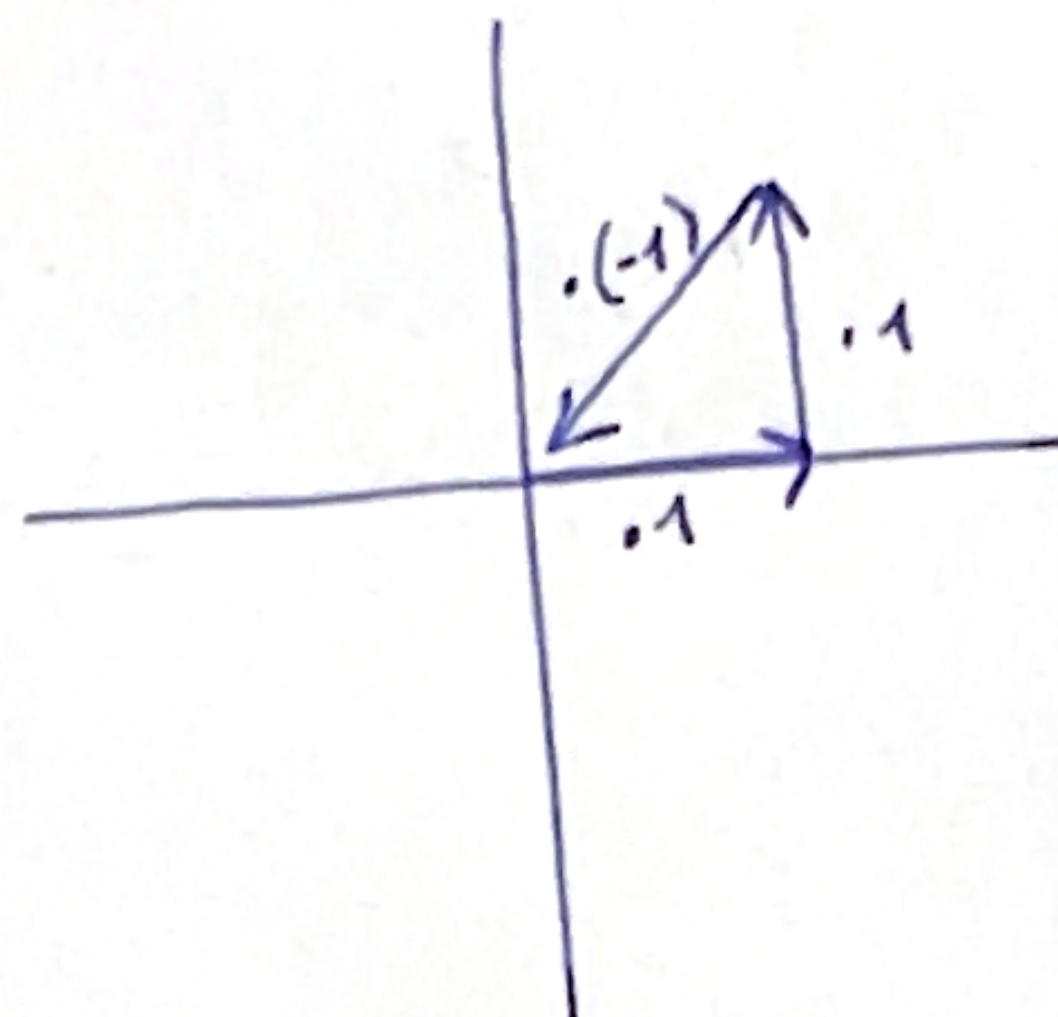


v_3 gibt nicht neues

- Sicht 2: unabhängig $\Leftrightarrow (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}_{\text{triviale Linearkombi}})$

"Einziges Weg zum Ursprung: gar nicht erst loslaufen"

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- Warum Sicht 1 $\Leftrightarrow$ Sicht 2?

- Letzter Vektor mit $\lambda \neq 0$ / Vektor, der uns zurück zum Ursprung bringt, ist lin. Kombi. vorheriger (Sicht 2 $\Rightarrow$ Sicht 1)

- Können vorherige Vektoren verwenden, um abhängigen nachzubauen $\Rightarrow$ abhängiger bringt uns zurück (Sicht 1 $\Rightarrow$ Sicht 2)

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

unabhängig nach 1: Jeder bringt neue Koordinate

- Beispiel: $0 \in \{v_1, \dots, v_n\}$. Sind $v_1, \dots, v_n$ lin. unabhängig?

Sicht A: ~~Ja~~, $\text{span}(\cdot) = \{0\}$
Nein

"Was erreichen wir mit keinen Vektoren vom Ursprung? Den Ursprung"

Sicht B: Setze $\lambda_i = 1$ für 0, $\lambda_i = 0$ für anderen.
Nicht-triviale lin. Kombination.

$x \in \mathbb{R}^n$ schreiben

$\rightarrow x = p \cdot u$ für ein $p \in \mathbb{R}$ (Def. 1)

$\rightarrow x = u \cdot \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Def. 2)

$\rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n$ schreiben

$\rightarrow x = \lambda \cdot u$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Def. 1)

$\rightarrow x = \lambda \cdot \frac{u}{\|u\|}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Def. 2) $\rightarrow u = \frac{x}{\lambda} \cdot \|u\|$

$\rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n \rightarrow (x \in \mathbb{R}^n) \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$

Def. 1: $A \subseteq B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

Aufgaben in-class

1. a) ~~$L = \{ \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$ für ein~~

~~line: immer~~
~~durch origin~~

$$M \not\equiv \{ \overset{M}{\lambda} u \mid \overset{M}{\lambda} \in \mathbb{R} \}$$

$$L = \{ \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$M \not\equiv \subseteq L:$$

$x \in M$ arbiträr

$$\Rightarrow x = \mu u \text{ für ein } \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{Def. } L')$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\mu \cdot \lambda}_{\lambda' \in \mathbb{R}} \cdot w \text{ für ein } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \quad (u \in L)$$

$$\Rightarrow x \in L^{\lambda' \in \mathbb{R}}$$

$$L \subseteq M$$

$x \in L$ arbiträr

$$\Rightarrow x = \lambda w \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Def. } L)$$

$$\Rightarrow x = \lambda \cdot \frac{u}{\lambda'} \text{ für ein } \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \quad (u \in L \Rightarrow u = \lambda'' w; \lambda'' \neq 0)$$

$$\Rightarrow x \in M$$

$$(L \subseteq M) \wedge (M \subseteq L) \Rightarrow L = M$$

Aus Disk Math: $A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

b) $0 \in L_1 \cap L_2$? Immer, weil sie per Definition durch den Ursprung verlaufen. ✓

Formell: $L_1 = \{ \lambda_1 w_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R} \}$
 $L_2 = \{ \lambda_2 w_2 \mid \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$

$$0 = 0w_1 \wedge 0 = 0w_2 \Rightarrow 0 = \lambda_1 w_1 \wedge 0 = \lambda_2 w_2$$

für ein $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \in L_1 \wedge 0 \in L_2$$

$$\Leftrightarrow 0 \in L_1 \cap L_2$$

~~Ausgabe~~ Angenommen $L_1 \cap L_2 \neq \{0\}$

$$\Leftrightarrow x \in L_1 \wedge x \in L_2 \text{ mit } x \neq 0 \text{ für ein } x$$

($L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ muss weiteres Element geben)

$$\Rightarrow L_1 = \{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$$\wedge L_2 = \{ \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

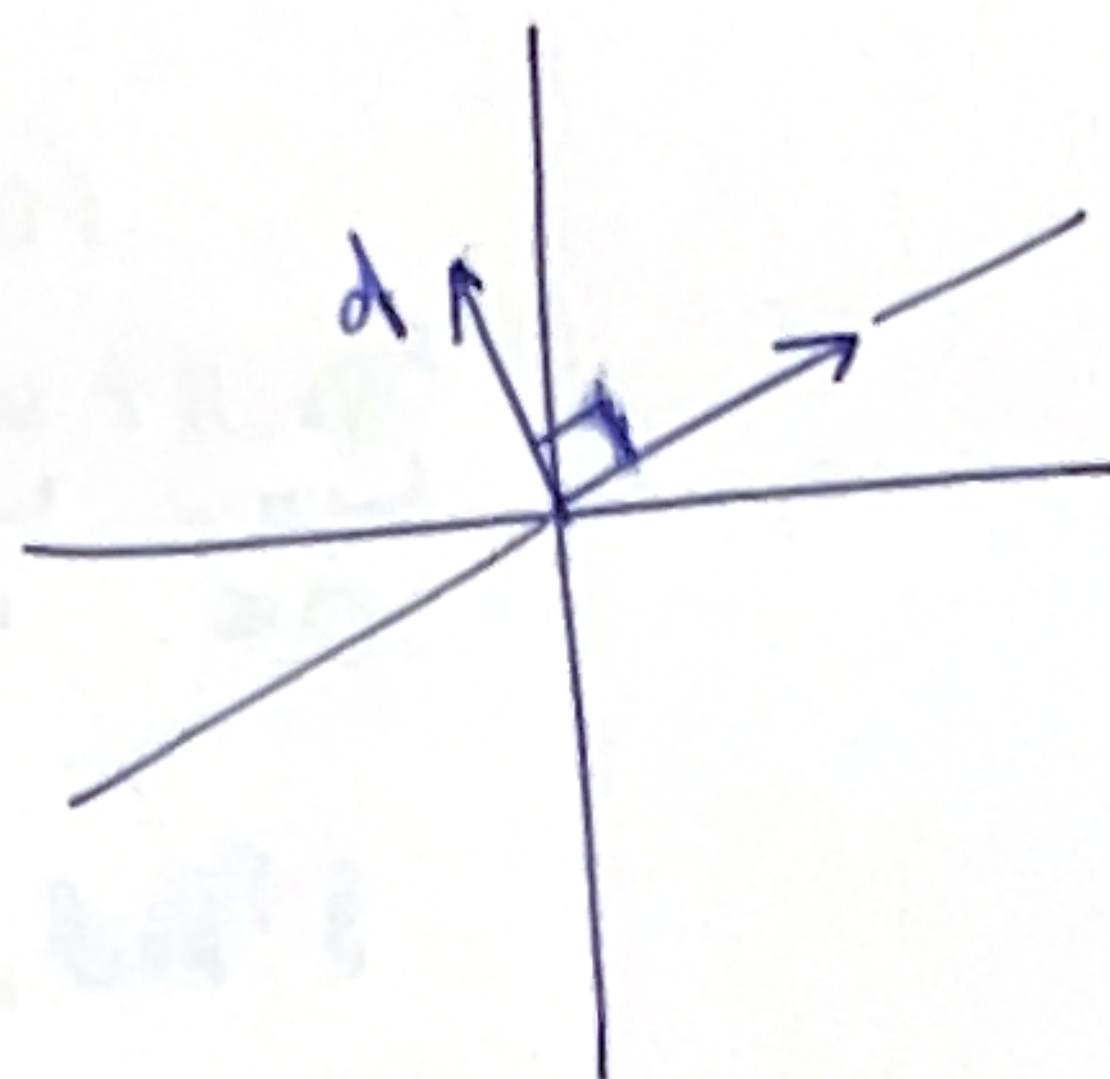
$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

c) $\mathcal{L} = \{ \lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R} \}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ (Def. line thru origin)

$$M = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v \cdot d = 0 \}$$

Macht es einfacher:
d explizit benennen

$$d := \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$



Zu zeigen: $\mathcal{L} = M$

$$\mathcal{L} \subseteq M:$$

$$\vec{v} \in \mathcal{L} \text{ arbiträr}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \lambda w$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot d = (\lambda w) \cdot d$$

$$= \lambda \cdot (w \cdot d)$$

$$= \lambda \cdot 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} \in M$$

$$\mathcal{L} \supseteq M \mid M \subseteq \mathcal{L}:$$

~~$w_1 \neq 0$~~ : $v \in M$ arbiträr. Damit $v \in \mathcal{L}$: Müssen λ finden, sodass $\textcircled{1} v_1 = \lambda w_1$ $\wedge$ $\textcircled{2} v_2 = \lambda w_2$
 $\nwarrow$ gleich $\nearrow$

$$w \neq 0 \Rightarrow w_1 \neq 0 \text{ oder } w_2 \neq 0$$

$w_1 \neq 0$: Vermuten, dass $\lambda = \frac{v_1}{w_1}$ brauchen $w_1 \neq 0$

$\textcircled{1}$ Gilt, weil $v_1 = \frac{v_1}{w_1} w_1$

$\textcircled{2} -v_1 w_2 + v_2 w_1 = 0 \quad | +v_1 w_2$

$v_2 w_1 = v_1 w_2 \quad | : w_1$

$v_2 = \frac{v_1}{w_1} w_2 = \lambda w_2$

$w_2 \neq 0$: Analog

HS 25

Fall $\|v\|^2 \geq \|w\|^2$:

$$\begin{aligned} \cancel{\text{Hilf}} \quad \|v-w\|^2 &= (v-w)^T(v-w) \\ &= \|v\|^2 - 2 \underbrace{v^T w}_{\leq 0} + \underbrace{\|w\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|v\|^2 \\ &= \max \{ \|v\|^2, \|w\|^2 \} \end{aligned}$$

Gleichheit: $\underbrace{-2v^T w}_{\geq 0} + \underbrace{\|w\|^2}_{\geq 0} = 0$

$$\Rightarrow w = 0$$

Fall $\|w\|^2 \geq \|v\|^2$: analog